

## Eksempel med lik i parken

- Person funnen død i en park  
kl. 16:15 ein dag.

Temperatur:  $27^{\circ}\text{C}$

Ute-temp. da:  $15.2^{\circ}\text{C}$

Andre temp.-data:

Gjennomsnitt død døgned:  $13.1^{\circ}\text{C}$

Maksimaltemp:  $16.3^{\circ}\text{C}$  (kl. 13:00)

Minimaltemp:  $9.9^{\circ}\text{C}$

- Har også tabell med temperaturdata.

- Vil forsøke å finne dødstidspunktet ved  
Newtons avkjølingslov:

$$T'(t) = -k(T - T_{\text{ude}})$$

Antar  $k = 0.1$

$T$ : Temp. til liket i  $^{\circ}\text{C}$

$t$ : Tid i timer etter midnatt

1) Antar han ikke har vært død lenge;

$$T_{\text{ude}} \approx 15.2$$

Gir:  $T' = -k(T - T_{\text{ute}})$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{ute}})$$

$$\frac{dT}{T - T_{\text{ute}}} = -k dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_{\text{ute}}} = -k \int dt$$

$$\ln|T - T_{\text{ute}}| = -kt + C'$$

$$|T - T_{\text{ute}}| = e^{-kt + C'} = e^{C'} \cdot e^{-kt}$$

$$T - T_{\text{ute}} = \pm e^{C'} e^{-kt} = C e^{-kt}$$

$$T = T_{\text{ute}} + C e^{-kt}$$

Initialerav:  $T(16.25) = 27$

$$15.2 + C e^{-0.1 \cdot 16.25} = 27$$

$$C = e^{+1.625} (27 - 15.2) = 59.93$$

Såkl finne  $t$  slik at  $T(t) = 37$

$$15.2 + 59.93 e^{-0.1 \cdot t} = 37$$

$$e^{-0.1 \cdot t} = \frac{37 - 15.2}{59.93} = \frac{21.8}{59.93}$$

$$-0.1t = \ln \frac{21.8}{59.93}$$

$$t = -10 \cdot \ln \frac{21.8}{59.93} = 10 \cdot \ln \frac{59.93}{21.8} = 10.11$$

$$0.11 \cdot 60 = 6.6 \approx 7$$

-Død ca kl. 10:07

Merk: Over timer siden - Ikke rimelig  
at  $T_{\text{ute}} = 15.2$  heile denne tida.

Betre?: Tute er gjennomsnittet,  $13.1^{\circ}\text{C}$

I så fall:

$$T(t) = 13.1 + C e^{-0.1 \cdot t}$$

$$C = e^{1.625} \cdot (27 - 13.1) = 7059$$

Git  $T(t) = 37$  for

$$t = 10 \cdot \ln \frac{9}{37-13.1} = 10.83$$

$$0.83 \cdot 60 = 49.8$$

- Døe ca. kl. 10:50

- 43 min seinare.

Ende sebre: - To omsyn til at Tute er ein  
funke. av tide t.

$$\text{Modell: } T_{\text{ute}} = 3.2 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 13.1$$

- Motivet ut frå periodisitet (24h)

- Gjennomsnitt: 13.1

- Amplitude:  $\frac{1}{2}(16.3 - 9.9) = 3.2$

- Maksimal temp. for  $t = 13$ .

Diff. - likning:

$$T'(t) = -k(T - f(t)) \text{ der}$$

$$f(t) = 3.2 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 13.1$$

Eller:  $T' + kT = kf(t)$

- Linær, 1. orden.

Integrerende faktor:  $e^{kt} = e^{0.1t}$

$$e^{kt} (T' + kT) = e^{kt} k f(t)$$

$$(e^{kt} T)' = k e^{kt} f(t)$$

$$e^{kt} T = k \int e^{kt} f(t) dt =$$

$$0.1 \int e^{0.1t} \cdot [3.2 \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) + 13.1] dt =$$

$$1.31 \int e^{0.1t} dt + 0.32 \int e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt$$

$$= \frac{1.31}{0.1} e^{0.1t} + 0.32 \int e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt$$

Integral:

$$J = \int e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt = u v - \int u' v dt$$

der  $u = \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) \Rightarrow u' = -\frac{\pi}{12} \sin(\frac{\pi}{12}(t-13))$  og

$$v' = e^{0.1t} \Leftarrow v = 10 e^{0.1t}$$

$$J = 10 e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) - 10 \int e^{0.1t} \cdot (-\frac{\pi}{12}) \sin(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt =$$

$$10 e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) + \frac{10\pi}{12} \int e^{0.1t} \cdot \sin(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt$$

Nu delvis ind:

$$J = 10 e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) + \frac{5\pi}{6} (10 e^{0.1t} \sin(\frac{\pi}{12}(t-13)) -$$

$$10 \int e^{0.1t} \frac{\pi}{12} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt) =$$

$$10 e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) + \frac{25\pi}{3} e^{0.1t} \sin(\frac{\pi}{12}(t-13)) -$$

$$(\frac{5\pi}{6})^2 \int e^{0.1t} \cos(\frac{\pi}{12}(t-13)) dt$$

!! Jmf. oblig 4

$$y = e^{0.1t} \left[ 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + \frac{25\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) \right] \cdot \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 y + C'$$

$$\left(1 + \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2\right) y = e^{0.1t} \left[ 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + \frac{25\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) \right] + C'$$

$$y = \frac{1}{1 + \frac{25\pi^2}{36}} e^{0.1t} \left[ 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + \frac{25\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) \right] + C''$$

$$= \frac{36}{36 + 25\pi^2} e^{0.1t} \left[ 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + \frac{25\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) \right] + C''$$

Vi får:

$$e^{0.1t} T = 13.1 e^{0.1t} + 0.32 \cdot \frac{36}{36 + 25\pi^2} e^{0.1t} \left[ 10 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + \frac{25\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) \right] + C'$$

$$T(t) = 13.1 + 0.407 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 1.067 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + C' e^{-0.1t}$$

Initialbetingelser:

$$T(16.25) = 27$$

$$\Rightarrow C' = \dots = 65.15$$

$$T(t) = 13.1 + 0.407 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 1.067 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 65.15 e^{-0.1t}$$

- Skal så løse  $T(t) = 37$

0.55

→ Funktionsfil, plotting, lese av

noen  $T(t) \approx 37$

☐ Korleis?

→ Newtons metode

$$T'(t) = -0.106 \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) + 0.279 \cos\left(\frac{\pi}{12}(t-13)\right) - 6.515 e^{-0.1t}$$

Skal ha:  $T(t) = 37 \Leftrightarrow$

$$T(t) - 37 = 0$$

Itererer på

$$t_{n+1} = t_n - \frac{T(t_n) - 37}{T'(t_n)}$$

→ Skript

Løysing: 9.814

- Altså klokka 9:48

- Ideen med gjennomsnittstemp var vist ikke så god likevel.

- Eukare [?]: Eulers metode

→ Skript → plott

[?] Med tabell

- Gitt i tabell.dat

→ Les av fra plott:  $t \approx 9.82$

Problematizere / diskutere:

- Fordeler/ulempes med ulike metoder.

- Kilder til usikkerhet (k-verdien, t.d.)

• Teste konsentras i små vannsølvann i k?

• Viser seg å være ganske

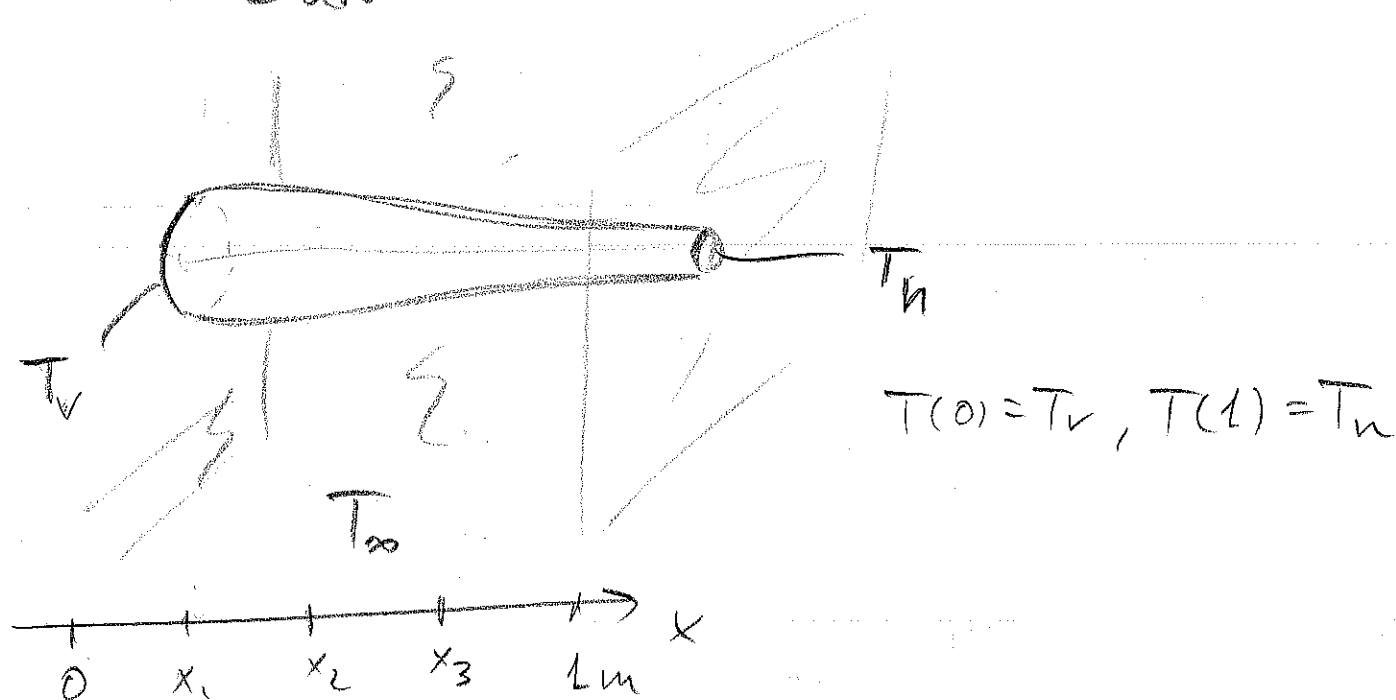
- Kanskje for enkelt: Har ikkje ~~tatt~~ dusyn  
til korleis ideet ligg, kva det ligg på  
etc.

- Rimeleg å gå ut frå at temp er  
den same i heile kroppen?

- Utviding: PDE,  $T(F, t)$

- Mykje meir komplisert.

# ④ Eksempel med temperaturfordeling i stav.

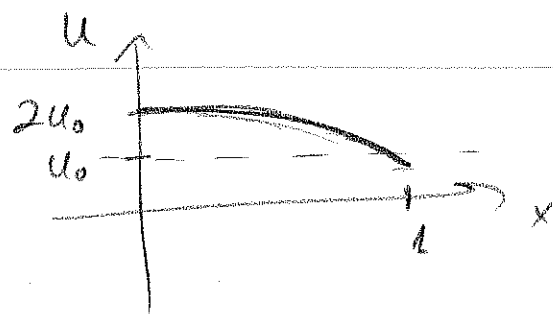


$T(x)$  = Temp i position  $x$ .

Modell:

$$T''(x) = u(x) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{varmedop} \\ \text{omgivend} \end{array} \text{ til}$$

Tenkjer oss at  $u = u_0 (\cos(\frac{\pi}{2} x) + 1)$



- Stabil;  $T$  endrer seg ikke med tide.

Numersk: Deler intervallet inn i 4:

$$[0, 1] = [0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, 1]$$

- Kan estimere  $T(x)$  i  $x_1, x_2, x_3$

Numerisch derivasjon:

ver

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2}, \text{ her: } h = \frac{1}{4}$$

Altså:

$$T''(x_1) = u(x_1)$$

$$T''(x_1) = \frac{T(0) - 2T(x_1) + T(x_2)}{h^2} = u(h)$$

$$T_0 - 2T_1 + T_2 = h^2 u(h)$$

$$T''(x_2) = \frac{T(x_1) - 2T(x_2) + T(x_3)}{h^2} = u(x_2)$$

$$T_1 - 2T_2 + T_3 = h^2 u(2h)$$

$$T''(x_3) = \frac{T(x_2) - 2T(x_3) + T(1)}{h^2} = u(x_3)$$

$$T_2 - 2T_3 + T_n = h^2 u(3h)$$

Altså:

$$-2T_1 + T_2 = h^2 u(h) - T_0$$

$$T_1 - 2T_2 + T_3 = h^2 u(2h)$$

$$T_2 - 2T_3 = h^2 u(3h) - T_n$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} = \begin{bmatrix} h^2 u(h) - T_0 \\ h^2 u(2h) \\ h^2 u(3h) - T_n \end{bmatrix}$$

Kan løysast ved å invertere matrise.  
 $\vec{T} = D^{-1} \vec{b}$

Men: Vi kan gjere dette analytisk:

$$T''(x) = u(x)$$

$$T'(x) = \int u(x) dx = \int u_0 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \right) dx =$$

$$u_0 \left( \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x \right) + C_1$$

$$T(x) = \int T'(x) dx = \int \left[ u_0 \left( \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x \right) + C_1 \right] dx =$$

$$u_0 \left( -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 \right) + C_1 x + C_2 =$$

$$u_0 \left( -\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 \right) + C_1 x + C_2$$

$$T(0) = T_v$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{\pi^2} u_0 + C_2 = T_v, \quad C_2 = T_v + \frac{4}{\pi^2} u_0$$

$$T(1) = T_n$$

$$\Rightarrow u_0 \cdot \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = T_n$$

$$C_1 = T_n - \frac{u_0}{2} - T_v - \frac{4}{\pi^2} u_0$$

→ Figur:  $T_v = 20$ ,  $T_n = 15$ ,  $u_0 = 25$

→ Skript: Med aukande antal punkt.

- Legg ut skript og funksjonsfiler.