

Foredlesing 24/4

① Info?

Vikar i dag og på mandag

Utlevering av obligar

I dag: Blir ferdig med pensum

② Sist gang:

For: $y'' + py' + qy = 0$ og karakteristisk
likning $r^2 + pr + q = 0$.

Kan få komplekse røtter: $r_1 = a + ib$ og $r_2 = a - ib$

Generell løsning: $y = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$

- Kan også skrives som

$$y = C e^{ax} \cos(bx) + D e^{ax} \sin(bx).$$

Kvi for?

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

$$e^{r_1 x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax+ibx} = e^{ax} \cdot e^{ibx} =$$

$$e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)).$$

$$\text{Også: } e^{r_2 x} = \dots = e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx))$$

$$\begin{aligned}
 y &= A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} = A e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)) + B e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)) \\
 &= \underbrace{(A+B)}_C e^{ax} \cos(bx) + \underbrace{(iA-iB)}_D e^{ax} \sin(bx) \\
 &= C e^{ax} \cos(bx) + D e^{ax} \sin(bx)
 \end{aligned}$$

Poeng: med $y = A e^{(a+ib)x} + B e^{(a-ib)x}$ ser det ut som y må være kompleks. Men det er jo ikke tilfelle dersom $C, D \in \mathbb{R}$.

③ Svingelikninger

- Eksempel på realiseringar

- Kloss i fjør

- Pendel / huske

• Poeng: 1. ordens Taylor-polynom

- RLC-krets

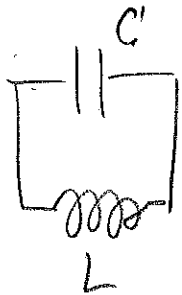
- Damping / påtrykk

• Resonans

④ Eksempel med RLC-krets

Først: $R=0$, ingen spenningskilde

Eksempel



For denne kretsen gjelder

$$LQ'' + \frac{1}{C}Q = 0$$

der $Q(t)$ er ladninga på kondensatoren
"-||-" og t er tida. a) Gitt at
strømmen $I(t) = Q'(t)$ er null ved $t=0$
og ladninga er Q_0 ved $t=0$, Finn
 $I(t)$

b) Vi kopler nå på ei spenningskilde /
antenne som gir spennings $U_0 \sin(\omega t)$.
Vi får da at

$$LQ'' + \frac{1}{C}Q = U_0 \sin(\omega t).$$

Finn $I(t)$ for dette systemet, same
initialbetingelser.

Kva skjer når $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$?

a) Går ut fra at $Q = e^{rt}$ slik at $Q'' = r^2 e^{rt}$

$$L r^2 e^{rt} + \frac{1}{C} e^{rt} = 0 \Leftrightarrow L r^2 + \frac{1}{C} = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^2 = -\frac{1}{LC} \Leftrightarrow r = \pm \sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm i \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(= 0 \pm i \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

$$Q = A e^{0t} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + B e^{0t} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

$$= A \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + B \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

Given: $Q(0) = Q_0$

$$I(0) = Q'(0) = 0$$

$$A \cos 0 + B \sin 0 = Q_0 \Rightarrow A = Q_0$$

$$Q'(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{B}{\sqrt{LC}} \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$$Q'(0) = 0$$

$$-\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin 0 + \frac{B}{\sqrt{LC}} \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$Q(t) = Q_0 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$$I(t) = Q'(t) = -\frac{Q_0}{\sqrt{LC}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$\frac{1}{\sqrt{LC}}$: Resonansfrekvens, ω_0

$$I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t) \quad \text{— strömmen svingar}$$

- b) — Har funne generell lösning av homogen lilla.
 — Man finne partikulær lösning av

$$L Q'' + \frac{1}{C} Q = U_0 \sin(\omega t)$$

— Går ut å frø at $Q = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$

$$Q'(t) = a\omega \cos(\omega t) - b\omega \sin(\omega t)$$

$$Q''(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 Q(t)$$

Set inn:

$$L(-\omega^2) Q + \frac{1}{C} Q = U_0 \sin(\omega t)$$

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) a = U_0 \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right) b = 0$$

$$a = \frac{U_0}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \quad \text{og} \quad b = 0$$

$$Q_p = \frac{U_0}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\text{NB: } M^2 \text{ kreve at } \frac{1}{C} - L\omega^2 \neq 0 \Leftrightarrow \omega \neq \sqrt{\frac{1}{LC}} = \omega_0$$

$$Q = Q_p + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) =$$

$$\frac{U_0}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \sin(\omega t) + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$Q(0) = Q_0 \Rightarrow A = Q_0$$

$$Q'(t) = \frac{U_0 \omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \cos(\omega t) - Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$Q'(0) = 0 \Rightarrow \frac{U_0 \omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \cdot 1 - 0 + B \omega_0 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$B = -\frac{U_0 \omega}{\omega_0 \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)}$$

$$Q(t) = \frac{U_0}{\frac{1}{C} - L\omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right) + Q_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$I(t) = Q'(t) = \frac{U_0 \omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)) - \omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$$

-Svingar framlede, men med en annen frekvens.

Men: Dersom $\omega = \omega_0$, er

$a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$ alt inkludert i løysinga
er den homogene likninga.

- Ganger med t .

$$Q_p = t (a \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t))$$

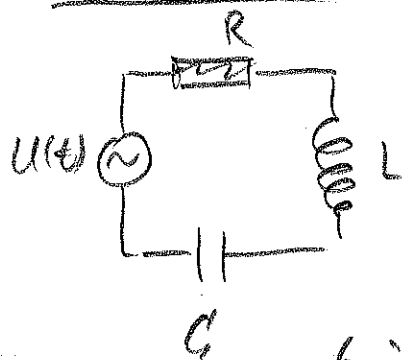
- Løser ilette denne.

Men: Vi får bestemt a og b her, og
finn ei løysing.

Ser: Når t aukar blir $|Q_p|$ større
og større i gjennomsnitt; den går
som ein trigonometrisk funk. med
amplitude som berre aukar.

→ Resonans.

Eksempel



For denne kredsløb gælder:

$$L Q'' + R Q' + \frac{1}{C} Q = U(t)$$

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$\text{Givet: } L = 1, \quad R = 1, \quad C = \frac{1}{4}, \quad U_0 = 1$$

- Løs differentiaalligningen for $\omega = 1$.
- Løs differentiaalligningen for $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
- Når t blir stor vil løsningene i begge tilfeller gå som en sinus-funktion. Hva amplituden har de tilsvarende strømme da?

a) Homogen likn.: $Q'' + Q' + \frac{1}{4} Q = 0$

$$Q'' + Q' + 4Q = 0$$

Karakteristisk likn.: $r^2 + r + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{15} i$$

$$Q_h = e^{-t/2} (\cos(\sqrt{15}t) + \sin(\sqrt{15}t))$$

Partikulær løsning: $Q_p = a \sin t + b \cos t$

$$Q_p' = a \cos t - b \sin t, \quad Q_p'' = -a \sin t - b \cos t$$

Gir:

$$-a \sin t - b \cos t + a \cos t - b \sin t + 4(a \sin t + b \cos t) = \sin t$$

$$(-a-b+4a)\sin t + (-b+a+4b)\cos t = \sin t$$

- For all t

$$3a-b=1, \quad a+3b=0$$

$$a=-3b$$

$$3 \cdot (-3b) - b = 1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{10}$$

$$a = -3 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10}$$

$$Q_p = \frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t$$

$$Q(t) = Q_p + Q_h = \frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t + e^{-\frac{t}{2}} (\cos(\sqrt{15}t) + \sin(\sqrt{15}t))$$

b) - Same Q_h

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{1}{1 \cdot \frac{1}{4}}} = 2$$

"Tipper" $Q_p = a \sin(2t) + b \cos(2t)$

$$Q_p' = 2a \cos(2t) - 2b \sin(2t)$$

$$Q_p'' = -4a \sin(2t) - 4b \cos(2t)$$

For

$$-4a \sin(2t) - 4b \cos(2t) + 2a \cos(2t) - 2b \sin(2t) + 4(a \sin(2t) + b \cos(2t)) = \sin(2t)$$

$$-2b \sin(2t) + 2a \cos(2t) = 1 \sin(2t) + 0 \cos(2t)$$

$$b = -\frac{1}{2} \text{ og } a = 0$$

$$Q(t) = Q_p + Q_h = -\frac{1}{2} \cos(2t) + e^{-t/2} (\cos(\sqrt{15}t) + \sin(\sqrt{15}t))$$

c) For stor t : $e^{-t/2} \approx 0$

$Q(t) \approx Q_p$ for stor t .

Har: $a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t) = r \sin(\omega t + \varphi)$

der $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

I a)

$I(t) \approx Q_p'$ med $Q_p = r \sin(t + \varphi)$,

$$r = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$I(t) \approx \frac{\sqrt{10}}{10} \cos(t + \varphi), \text{ amplitude: } \frac{\sqrt{10}}{10} \approx 0.32$$

I b)

$I(t) \approx Q_p'$ med $Q_p = -\frac{1}{2} \cos(2t)$

$$I(t) \approx -\frac{1}{2} \cdot (-2) \sin(2t) = \sin(2t), \text{ amplitude } 1$$

Over 3 ganger så stor.

Større skilnad om vi ser på effekten

i motstanden: $P = RI^2$

→ Målep - plott

- Værite R - og også L og C.

- Breid / smal, flytte ω .

- Q-faktor.

