Forelesing 10/4

① Info: Ikkje undervising i den stille veka

~~Etterpå~~: Vikar 24. og 28. apr.

② Når initialkravet ikkje er gitt i

$x = 0$.

Hugsar $e^{r(x-a)} = e^{rx} \cdot \underbrace{e^{-ra}}_{\text{konstant}}$

Eksempel

Løys desse initialverdiproblema:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(1) = 7$, $y'(1) = 11$

b) $y'' - 4y' + 13y = 0$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 3$

---

a) Går ut frå at $y = e^{rx}$ og får karakteristisk likning: $r^2 - 3r + 2 = 0$

$$r = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$r = \frac{3-1}{2} = 1$ eller $r = \frac{3+1}{2} = 2$

$y = Ae^x + Be^{2x}$

Initialkrav gitt i $x=1$. Triks:

$e^{x-1} = e^x \cdot e^{-1}$, $e^{2(x-1)} = e^{2x-2} = e^{2x} \cdot e^{-2}$

Om vi set opp $y = C e^{x-1} + D e^{2(x-1)}$, får vi $y = \underbrace{C \cdot e^{-1}}_{A} \cdot e^x + \underbrace{D \cdot e^{-2}}_{B} \cdot e^{2x}$

C, D, A, B alle vilkårlege konstanter.

Kan sette opp $y = Ce^{x-1} + De^{2(x-1)}$

Initialkrav: $y(1) = 7$

$Ce^{1-1} + De^{2\cdot(1-1)} = 7$, $C + D = 7$, $D = 7 - C$

$y'(x) = Ce^{x-1} + 2De^{2(x-1)}$

Initialkrav: $y'(1) = 11$

$C \cdot e^0 + 2D \cdot e^0 = 11$, $C + 2D = 11$

$C + 2(7 - C) = C - 2C + 14 = -C + 14 = 11$

$C = 14 - 11 = 3$

$D = 7 - C = 7 - 3 = 4$

$y(x) = 3e^{x-1} + 4e^{2(x-1)}$

b) Kar. likn.: $r^2 - 4r + 13 = 0 \iff$

$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 13}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}}{2} =$

$$\frac{4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3i \quad \text{der} \quad i = \sqrt{-1}$$

Generell løysing: $y = Ae^{2x}\cos(3x) + Be^{2x}\sin(3x)$

Kan også skrive:

$$y = Ce^{2(x-2)}\cos(3(x-2)) + De^{2(x-2)}\sin(3(x-2))$$

– Passar betre med initialkravet.

$y(2) = 0$

$Ce^{2\cdot 0}\cos(3\cdot 0) + De^{2\cdot 0}\sin(3\cdot 0) = 0$

$C = 0$

$y(x) = De^{2(x-2)}\sin(3(x-2))$

$y'(x) = De^{2(x-2)}(2\sin(3(x-2)) + 3\cos(3(x-2)))$

$y'(2) = 3$

$D\cdot e^0(2\sin 0 + 3\cos 0) = 3, \quad 3D = 3, \quad D = 1$

Løysing:

$$\underline{y(x) = e^{2(x-2)}\sin(3(x-2))}$$

Så: Dette med $\sqrt{-1} = 1$ ...

③ Intro: Historikken til negative tal

(Eige ark).

④ Komplekse tal

Vi tillét oss å rekne med $\sqrt{-1}$ og gir han namnet „i" (ikkje „j"!).

Eksempel

Løys likningane

a) $z^2-2z+5=0$

b) $z^2=-9$

a) a,b,c-formel:

$$z=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=$$

$$\frac{2\pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm4i}{2}=\underline{1\pm2i}$$

$z=1-2i$ eller $z=1+2i$

b) $z^2=-9$, $z=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=\underline{\pm3i}$

Komplekst tal: $z=x+iy$ realdel, imaginærdel

$\mathrm{Re}\,z=x$, $\mathrm{Im}\,z=y$

Absoluttverdi (modulus): $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

„Reelt": *Verkeleg*

„Imaginært": *Innbilt*

Vi kallar i den imaginære eininga [enheten] og seier at tal av typen $\sqrt{-9} = 3i$ er imaginære.

– kunstig.

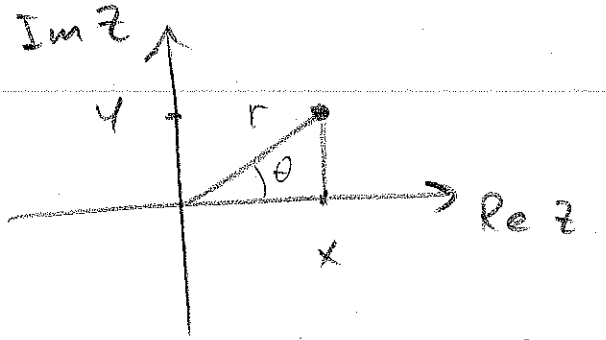
„Komplekst": *Samansett*

Typar tal:

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ ↙ Mengde av alle komplekse tal

$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Det komplekse planet



Ser: $\frac{x}{r} = \cos\theta$

$\frac{y}{r} = \sin\theta$

$\left(\frac{y}{x} = \tan\theta\right)$

Altså: $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$

der $r = \sqrt{x^2+y^2}$ og $\tan\theta = \frac{y}{x}$

NB: Kan ikkje utan vidare seie at $\theta = \arctan\frac{y}{x}$

$\boxed{?}$ Kva er eigentleg skilnaden på $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$?

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vs. $x + iy$ ... ?

Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Kan vise dette ved å skrive eit uendeleg langt Taylor-polynom for e^x og så kreve at dette skal stemme for imaginære x.

(-skal ikkje gjere det her.)

-Har altså to skrivemåtar:

Kartesisk form: $z = x + iy$

Polar form: $z = re^{i\theta}$

Hæresdal: OK at $r<0$.

-Tilrår det ikkje.

Eksempel

a) Skriv desse tala på kartesisk form:

$z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$, $u = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$, $v = e^{i\pi}$, $w = 2e^{3i}$

b) Skriv desse tala på polarform

$z = 1+i$, $u = 1-i$, $v = -1+\sqrt{3}\,i$

$$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$$z = 3\cos\tfrac{\pi}{3} + i\,3\sin\tfrac{\pi}{3} = 3\cdot\tfrac{1}{2} + i\,3\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\tfrac{3}{2} + i\,\tfrac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$u = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \underline{1-i}$$

$v = \cos\pi + i\sin\pi = \underline{-1} \quad (= -1 + 0i)$

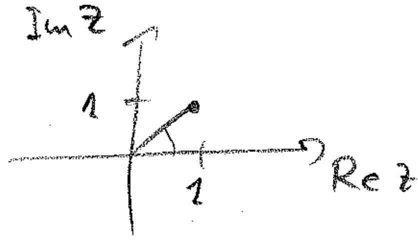
$w = 2(\cos 3 + i\sin 3) \approx \underline{-1.980 + 0.282\,i}$

b) $z = re^{i\theta}$ med $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

For $\theta \in [0, 2\pi)$: $\theta = \frac{\pi}{4}$ eller $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi$

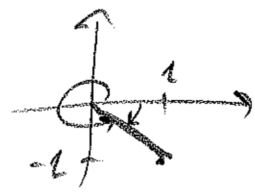
Ser: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta = \frac{\pi}{4}$



$\underline{z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$u = 1 - i$, $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$, $\theta = -\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi$



ser: $\theta = [-\frac{\pi}{2}, 0]$ eller
$\theta = [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

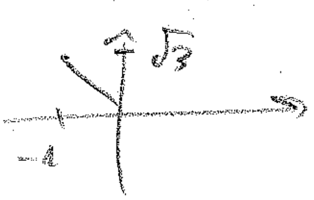
$\theta = -\frac{\pi}{4}$ eller $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$\underline{u = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \underline{\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}}$

ser: redundans: $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2n\pi)}$, $n \in \mathbb{Z}$

$v = -1 + \sqrt{3}\, i$, $|v| = r = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\arctan -\sqrt{3} = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$



Ser: $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$

$\underline{v = 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

Triks for å skrive brøkar på kartetesisk form: Gange med den kompleks-konjugerte.

Dersom $z = x + iy$, er den konjugerte $\bar{z} = x - iy$.

- Endrar forteikn på det imaginære leddet

Eksempel

Løys likninga $2z - 3 + i = 2iz + 4$

$$2z - 2iz = 4 + 3 - i$$

$$(2-2i)z = 7 - i$$

$$z = \frac{7-i}{2-2i} = \frac{(7-i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} =$$

$$\frac{7\cdot 2 + 7\cdot 2i - i\cdot 2 - 2i^2}{2\cdot 2 + 2\cdot 2i - 2i\cdot 2 - (2i)^2} =$$

$$\frac{14 + 14i - 2i - 2\cdot(-1)}{2^2 - 2^2\cdot(-1)} =$$

$$\frac{14 + 2 + 12i}{2^2 + 2^2} = \frac{16 + 12i}{8} = \underline{2 + \frac{3}{2}i}$$

Ser: $z \cdot \bar{z} = r^2$

Reknereglar

- Heilt intuitive:

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ og $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ gir

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Spesielt:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Altså:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

De Moivres formel

Rot-uttrykk: $\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (r\,e^{i\theta})^{1/n} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\,\theta/n}$

Eksempel

Løys likninga $z^3 = -1 + \sqrt{3}\,i$

Har sett: $-1 + \sqrt{3}\,i = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$

– så z kan vere tredjerota av dette.

Men: $2\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2\,e^{i(\frac{2\pi}{3} + n2\pi)}$ med $n \in \mathbb{Z}$

$$z^3 = 2\,e^{i(\frac{2\pi}{3} + n2\pi)}$$

$$z = \left(2\,e^{i(\frac{2\pi}{3} + n2\pi)}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{1}{3}(\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi)} = \sqrt[3]{2}\,e^{i(\frac{2\pi}{9} + n\frac{2}{3}\pi)}$$

$$z = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{9}} \qquad (n=0)$$

eller

$$z = \sqrt[3]{2}\,e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi)} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{8\pi}{9}} \qquad (n=1)$$

eller

$$z = \sqrt[3]{2}\,e^{i(\frac{2\pi}{9} + \frac{2}{3}\cdot 2\pi)} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{14\pi}{9}} \qquad (n=2)$$

④ Men kva har dette å gjere med diff.-likningar av 2. orden?

- Tenkjer oss at $y'' + py' + qy = 0$ gir ei karakteristisk likning med $r_1 = a + ib$ som rot (kompleks)

I så fall er også $r_2 = \overline{r_1} = a - ib$ ei rot, og den generelle løysinga kan skrivast som

$$y = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x} =$$

$$A e^{(a+ib)x} + B e^{(a-ib)x}$$

? Betyr det at y må vere kompleks?

<u>Nei</u>

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax+ibx} = e^{ax} \cdot e^{ibx} =$$

$$e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx))$$

Tilsvarande: $e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx))$

$$y = A e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(bx)) + B e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(bx)) =$$

$$e^{ax}(\cos(bx)(A+B) + \sin(bx)(iA - iB))$$

Med $A + B = C$ og $iA - iB = D$:

$$y = e^{ax}(C\cos(bx) + D\sin(bx))$$

- Ser at $y \in \mathbb{R}$ dersom $C, D \in \mathbb{R}$

(A og B må vere komplekse på „rett" måte.)