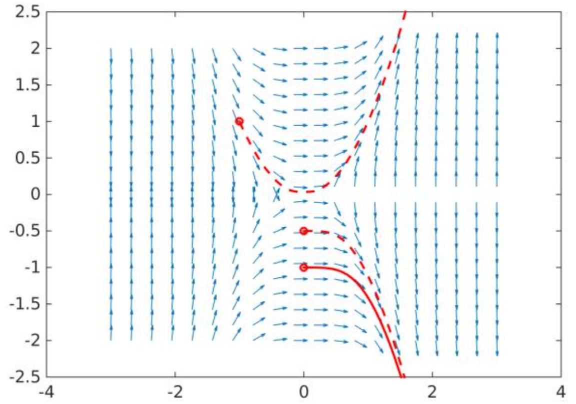
Løysingsforslag for oppgåvene veke 17.

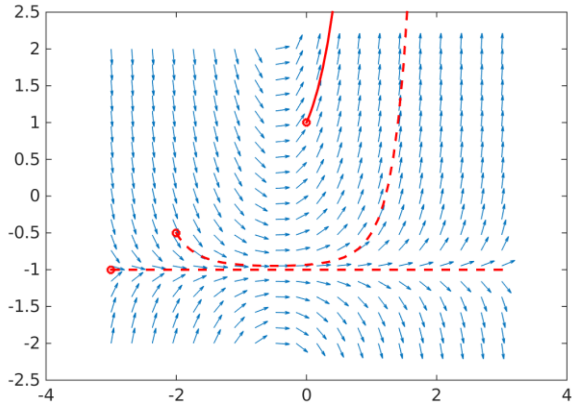
Oppgåve 1

Retningsfelt for differensiallikningar gitt i oppgg. 12.6.3 – med numeriske løysingar for gitt initalkrav (og eit par til).

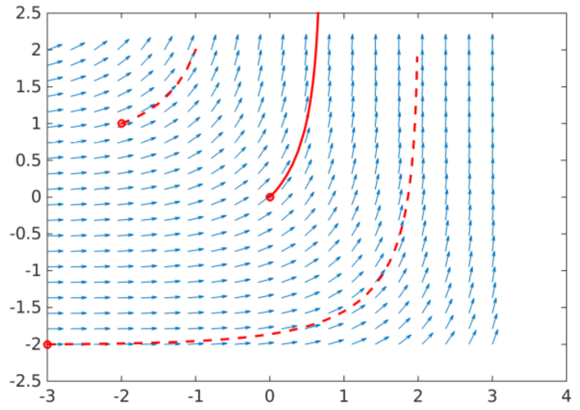
a)



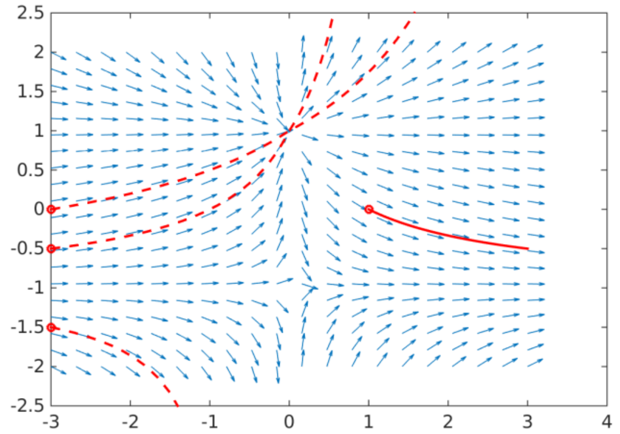
b)



c)

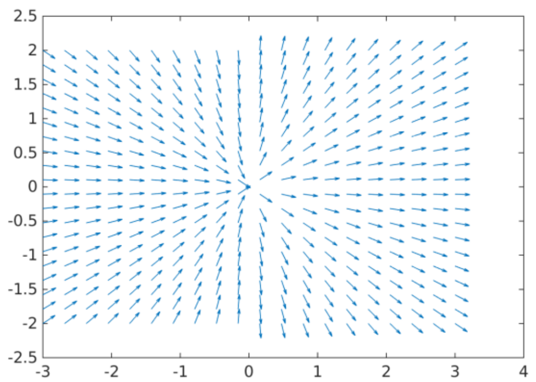


d)

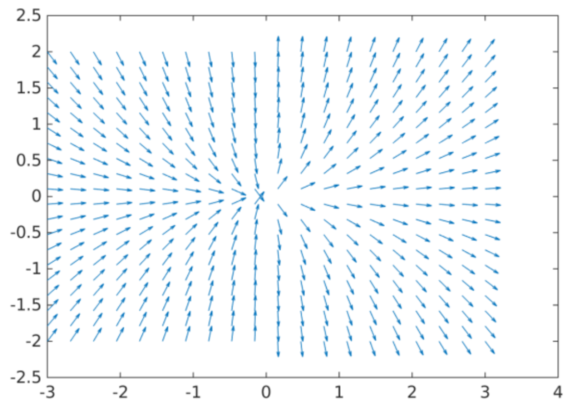


Oppgåve 2

a)



c)



b) Retningsfeltet i a) hintar om løysingar som er rette linjer gjennom origo; $y=k\,x$.
Stemmer dette?
Venstre side i diff.-likninga: $y'=k$.
Høgre side i diff.-likninga: $y/x=kx/x=k$.
Det stemmer.
Vidare: For kvart startkrav $y(x_0)=y_0$ skal vi ha nøyaktig éi løysing.
Set inn:
$y_0=k\,x_0$
$k=y_0/x_0$
Vi har altså fått bestemt k – og dermed også $y(x)$ – eintydig for alle $x_0 \neq 0$.

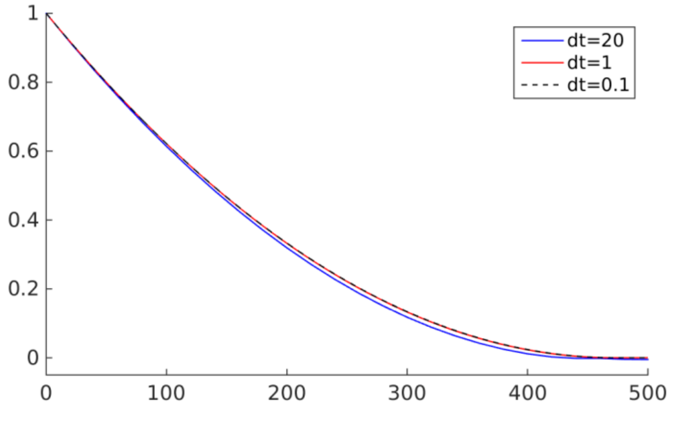
c) Figuren ser ut til å hinte om andregradsfunksjonar. Vi prøver $y= k\,x^2$:
$y'=2kx$
$y/x= 2\,kx^2/x = 2kx$.
Joda, den generelle løysinga *er* $y(x)=k\,x^2$.

Oppgåve 3

a) Om vi overset pseudokoden til «matlabsk», kan han sjå slik ut:
```
t=0;             % startverdi t=0 i sekunder...
h=1;             % ... og h(0) i meter
dt=0.1;          % steglengde
N=3000;          % antall steg

for n=1:N
    h=h-4.23*1e-3*sqrt(h)*dt;     % neste høyde
    t=t+dt;      % neste tidspunkt
    disp([t h]) % skriver punktene til skjerm
end
```

Slik som dette er koda nå, får vi ut ein tabell med drøssevis av t og h-verdiar når vi køyrer skriptet:
```
>> EulersMetLaerebok
    0.1000    0.9996
    0.2000    0.9992
    0.3000    0.9987
    0.4000    0.9983
    0.5000    0.9979
    0.6000    0.9975
...

    299.9000    0.1337
    300.0000    0.1335
```

Litt meir interessant er det nok å plotte det. Om vi gjer det, og ikkje minst: varierar dt, kan plottet sjå slik ut:



Vi ser at *dt*=0.1, som vi brukar i skriptet over, er rikeleg fint nok.

b) Skriptet kan nå sjå slik ut:
```
t=0;            % startverdi t=0 i sekunder...
h=1;            % ... og h(0) i meter
dt=0.1;         % steglengde

while h>=0.01
    h=h-4.23*1e-3*sqrt(h)*dt;     % neste høyde
    t=t+dt;     % neste tidspunkt
end
t
```

Merk at variabelen *N* er borte. Når vi køyrer skriptet, finn vi at det tar 425.5 sekund før høgda er 1 cm.

c) Vi gjer ei lita justering i linje 5 – og skriv den endelege *h*-verdien til skjerm til sist:
```
t=0;            % startverdi t=0 i sekunder...
h=1;            % ... og h(0) i meter
dt=0.1;         % steglengde

while t<5000
    h=h-4.23*1e-3*sqrt(h)*dt;     % neste høyde
    t=t+dt;     % neste tidspunkt
end
h
```

Vi får eit litt rart svar:
```
>> EulersMetLaerebok
h =
  -0.0020 + 0.0000i
```

h har blitt negativ; tanken skuldar vatn! (*h* ser til og med ut til å ha blitt «litt» kompleks.) Dette viser vel ganske tydeleg at vi ikkje utan vidare skal stole på svara som ein pc-en gir oss.

d) Den deriverte av vannstanden, *h'*, er jo gitt ved differensiallikninga. Om vi samanliknar linja som reknar ut den neste *h*-verdien med skjemaet for Eulers metode,
$y_{n+1}=y_n+F(x_n,y_n)\,h$, der $y'=F(x,y)$,
ser vi at differensiallikninga er

$$h' = -4.23 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

Dermed kan vi implementere kravet slik:
```
t=0;            % startverdi t=0 i sekunder...
h=1;            % ... og h(0) i meter
dt=0.1;         % steglengde

while -4.23*1e-3*sqrt(h)<-1e-4
    h=h-4.23*1e-3*sqrt(h)*dt;     % neste høyde
    t=t+dt;     % neste tidspunkt
end
t
h
```

Når vi køyrer kravet finn vi at h' bikkar -10^{-4} i det t=461.5 og $h=5.537\cdot10^{-4}$. Svaret på det siste kunne vi rettnok lett ha funne eksakt direkte frå differensiallikninga: $h'=-10^{-4}$ gir at

$$-10^{-4} = -4.23 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$$

slik at

$$h = \left(\frac{-10^{-4}}{-4.23\cdot 10^{-3}}\right)^2 = 5.562 \cdot 10^{-4}.$$

Her ser vi svaret vi fekk med Eulers metode ikkje var veldig nøyaktig; vi burde nok ha brukt ein lågare *dt* for å få betre samsvar.

e) Tanken er tom når $h=0$:

```
t=0;            % startverdi t=0 i sekunder...
h=1;            % ... og h(0) i meter
dt=0.1;         % steglengde

while h>0
    h=h-4.23*1e-3*sqrt(h)*dt;     % neste høyde
    t=t+dt;     % neste tidspunkt
end
t
```

Når vi køyrer det, finn vi at det tar t=472.4 sekund å tømme tanken.

Oppgåve 4

Vi brukar Eulers metode for å løyse startverdiproblemet,

$v'=9.8-(30/75)\,v^2$

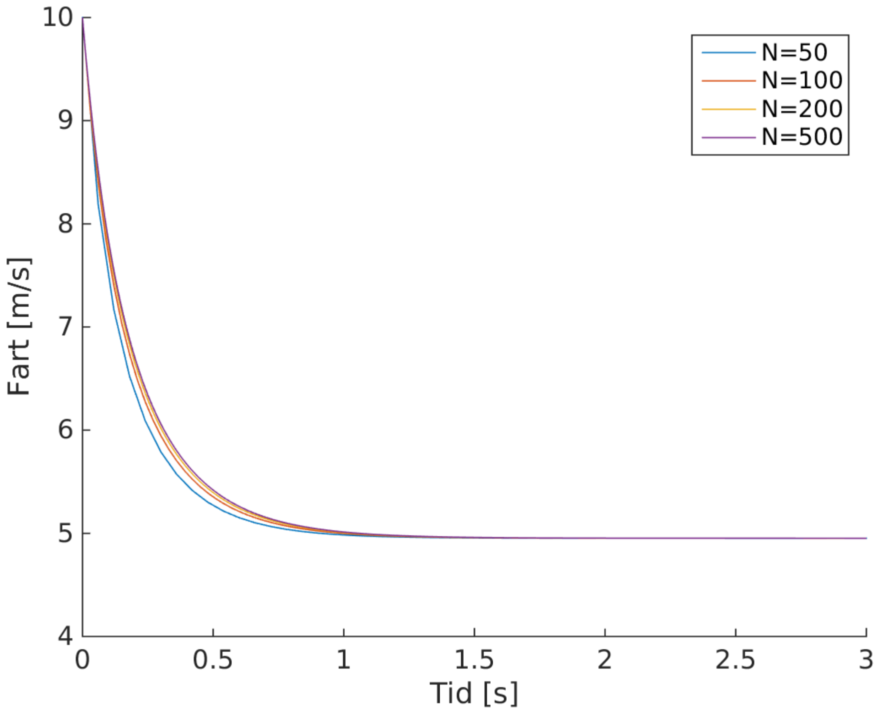
$v(0)=10$

der tida er gitt i sekund og farten er gitt i meter per sekund.

Skriptet kan sjå slik ut:

```
% Implementering av Eulers metode

% Differensiallikning
F=@(x,y) 9.81-30/75*y^2;

% Startkrav og endepunkt
x0=0;
y0=10;
xMax=3;

% Oppdeling
N=input('Kor mange steg skal vi bruke? ')
h=(xMax-x0)/N;
xVektor=x0:h:xMax;

% Eulers metode
y=y0;
yVektor(1)=y;
for i=1:N
  x=x0+(i-1)*h;
  y=y+F(x,y)*h;
  yVektor(i+1)=y;
end

% Plotting
hold on
plot(xVektor,yVektor)
```

Vi sjekkar at vi har fin nok oppdeling ved å plotte det vi får med stadig høgare *N*:



Figuren ser ut til å tyde på at terminalfarten er ca. 5 m/s.

Dette kunne vi ha funne ut av ved å tenke slik: Når tyngdekrafta og luftmotstanden balanserar kvarandre, vil ikkje farten endre seg – akselerasjonen er null. Med $v'=0$ gir differensiallikninga at $0=mg-bv^2$,

slik at $v = \sqrt{\frac{mg}{b}} = \sqrt{\frac{75 \cdot 9.81}{30}} m/s = 4.95\, m/s$, eller ca. 18 km/h.