# Innlevering nr. 4 i DAFE 1000
# Frist: 27. april kl. 16:15

Alle svar skal begrunnes og mellomregninger skal vises. Når MATLAB eller tilsvarende blir brukt, skal du ta med ei utskrift av det som blir gjort i kommandovinduet og av eventuelle skript og plott du lager.

## Oppgave 1

Bestem disse integralene. Gi svaret eksakt om det går. Hvis det ikke går, skal feilen være mindre enn $10^{-4}$.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x \sin x^2 \, dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin x^2 \, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{2x} \, dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 e^{x^2} \, dx$

## Oppgave 2

En ikke-elementær funksjon som heter "feilfunksjonen", $\mathrm{erf}(x)$, er definert slik:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, dt \quad .$$

Funksjonen *er* implementert i MATLAB, men det får du ikke lov til å bruke denne til å komme fram til svarene på spørsmåla nedenfor. Men du kan godt bruke den til å *kontrollere* svarene dine. Alle svar som du finner numerisk, skal ha en feil som er mindre enn $10^{-6}$.

a) Hvor stor er $\mathrm{erf}(1)$?

b) Hva er $(\mathrm{erf}(x))'$?

c) Bruk blant annet Newtons metode til å løse likninga

$$\mathrm{erf}(x) = 0.8 \quad .$$

## Oppgave 3

Denne funksjonen definerer profilen på en vase:

$$p(x) = x^{1/5} + \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right), \quad D_p = [0, 6] \quad .$$

Den gir avstanden, målt i dm, mellom symmetriaksen og utsida av vasen i høgda $x$ (også gitt i dm). I figuren har vi plotta vasen – sammen med profil-funksjonen og rotasjonsaksen:

a) Hva er volumet av vasen?

b) Etter å ha fylt vasen med vann, drar vi ut en propp i bunnen. Vi lar $h(t)$ være høgda av vannet, gitt i dm, etter at det har gått $t$ sekunder. Man kan vise at farten vannet renner ut med, målt i liter per sekund, er $k\sqrt{h}$, der konstanten $k = 0.067$. Forklar hvordan vi kan komme fram til at

$$h'(t) = -\frac{k}{\pi}\frac{\sqrt{h}}{[p(h)]^2} \quad .$$

c) Bruk Eulers metode til å plotte $h(t)$. Kontrollér at steglengda er liten nok til at svaret er rimelig nøyaktig. Her kan det vere lurt å implementere metoden på en slik måte at det stopper når $h$ blir negativ. På neste side er det foreslått en algoritme for dette.

d) Hvor lang tid tar det før vasen er tom? (*Bruk svaret i c) til å finne det ut.*)

e) Etter at vasen er tom, begynner vi å fylle vann på nytt med konstant fart på 0.15 liter per sekund. Samtidig er proppen fremdeles dratt ut slik at vann renner ut. Etter ei stund vil vannmengda i praksis ikke forandre seg lenger; den vil nærme seg ei likevekt. Hva er høgda av vannet da?

**Ekstraoppgaver (du trenger ikke å gjøre disse for å få innleveringa godkjent)**: I begge oppgavene under oppstår det litt problem når vi forsøker å implementere løsninga. Men vi kan klare å komme oss rundt disse problemene.

f) Kontrollér svaret ditt fra deloppgave e) ved å løse det tilsvarende startverdiproblemet numerisk.

g) Arealet av legemet vi får når grafen til $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$ roteres om $x$-aksen kan beregnes slik:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \quad .$$

I vårt tilfelle er det ikke helt uproblematisk å bruke denne formelen til å finne arealet av overflata av vasen. Hvorfor? Klarer du likevel å estimere arealet med en rimelig grad av nøyaktighet?

**Eulers metode**:

Metoden estimerer løsninga av et startverdiproblem av denne typen:

$$y'(x) = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad .$$

ved å estimere $y(x_n) \approx y_n$ ved hjelp av dette iterasjonsskjemaet:

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) \cdot h \quad ,$$

der $x_n = x_0 + n \cdot h$ og $y_0$ er gitt ved startkravet. Steglengda $h$ bør være liten.

I vårt tilfelle er høgresida bare avhengig av funksjonen $y$, ikke variabelen $x$.

1. Tilordne høgresida i differensiallikninga som en funksjon og gi startkravet.
2. Velg deg en verdi for $h$ og tilordne denne – gjerne ved hjelp av `input`-funksjonen i MATLAB.
3. La din første $y$-verdi være $y_0$.
4. Estimér neste $y$-verdi, $y(x_{n+1}) \approx y_{n+1}$, på denne måten:

$$y_{n+1} = y_n + F(y_n) \cdot h \quad .$$

5. Gjenta punkt 4 helt til $y_n$ ikke lenger er positiv.
6. Gjenta punkt 2–5 med stadig lavere $h$-verdier helt til resultatet er rimelig uavhengig av $h$.

Når vi skal gi resultatet som et plott, bør vi lagre de aktuelle $x$- og $y$-verdiene som vektorer.