Innlevering i DAFE 1000
Frist: 23. mars kl. 16:15

Alle svar skal begrunnes og mellomregninger skal vises. Når MATLAB blir brukt, skal du ta med ei utskrift relevante kommandoer, plott, skript og funksjonsfiler som du lager. Om du ønsker å løse oppgavene ved å bruke *Live Script*, er dette selvsagt helt ok. Andre språk/verktøy enn MATLAB, som for eksempel Python eller Java, kan også benyttes.

Husk å skrive tydelig navn og studentummer øverst på innleveringa di. Vi minner også om at den skal leverst som papir - *før* innleveringsfristen.

Legg merke til at oppgave 3 er noe spesiell.

Oppgave 1

I innlevering nr. 2 fant vi ut at det tok 17 iterasjoner å finne det nullpunktet til funksjonen

$$x \sin x - 1$$

som ligger mellom 0 og $\pi/2$ med halveringsmetoden når vi krevde at feilen skulle være mindre enn 10^{-5}.

a) Implementér Newtons metode for den samme likninga og undersøk hvor mange iterasjoner du nå trenger for å finne svaret med samme feilmargin. Bruk så Newtons metode til å finne svaret med ti rette desimaler. Velg selv en passende x_0; du kan godt lage et plott av funksjonen for å velge x_0.

b) Fikspunktiterasjon går ut å skrive likninga på forma $x = g(x)$ og så iterere:

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad .$$

For den samme likninga som over og med et passe valg for x_0, hvor mange iterasjoner trenger denne metoden for å gi et svar med en feil mindre enn 10^{-5} ?

Oppgave 2

Løs disse likningssystemene og kontrollér at du har fått rett redusert trappeform av totalmatrisa med `rref`-funksjonen i MATLAB. Husk å ta med MATLAB-kontrollen i besvarelsen din.

a) $$\begin{array}{rcr} x + 2y & = & 3 \\ 2x + y & = & -2 \end{array} .$$

b) $A\vec{x} = \vec{b}$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

c)
$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Oppgave 3

Et generelt likningssystem med n likninger og n variabler kan skrives på forma

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ,$$

der koeffisentmatrisa A er ei $n \times n$-matrise, og søylevektoren $\vec{b}$ har n elementer.

Lag ei implementering som avgjør om likningssystemet har entydig løsning eller ikke. A og $\vec{b}$ skal være input. Dersom systemet *har* entydig løsning, skal implementeringa finne denne og skrive den til skjerm.

Du skal demonstrere at implementeringa fungerer ved å bruke den på et par eksempler du velger selv. Pass på at eksemplene dekker tilfeller både med og uten entydig løsning.

Oppgava kan løses ved å bruke innebygde MATLAB-funksjoner som `det`, `inv` eller `rref`. **Dersom du klarer å løse denne oppgava uten å bruke disse eller lignende funksjoner, vil innleveringa di bli godkjent uansett**.

Oppgave 4

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4 \quad .$$

I tillegg krever vi at $f(0) = 0$.

Vi kan estimere løsninga for $x \in [0, 2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi legger midtpunktsformelen for numerisk derivasjon til grunn, kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen[1]:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi sette opp et likningssystem for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

a) Vis hvordan vi kommer fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrrrcl} 0.5f_1 & +f_2 & & & = & 0.8125 \\ -f_1 & +f_2 & +f_3 & & = & 4 \\ & -f_2 & +1.5f_3 & +f_4 & = & 11.8125 \\ & f_2 & -4f_3 & +5f_4 & = & 28 \end{array} \quad .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

c) Den fulle løsninga for $f(x)$ er $f(x) = x^3$. Vis at dette stemmer – altså at $f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4$ og at $f(0) = 0$ for denne funksjonen.

d) Plott den fulle løsninga sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse ut til å ligge omtrent der de skal?

[1] Akkurat som midtpunktsformelen, har denne en feil som er proporsjonal med h^2.