DAFE 1000, Vår 2018

Innlevering nr. 2

Løysingsforslag.

Oppg. 1

$$f(x) = x\sin x - 1$$

a) f er elemementær og definert på heile $\mathbb{R}$. Funksjonen er difor også kontinuerleg på heile $\mathbb{R}$

$f(0) = 0\sin 0 - 1 = -1 < 0$

$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$

f har minst eitt nullpunkt på $\langle 0, \pi/2\rangle$ ved skjæringssetninga.

$f'(x) = 1\cdot\sin x + x(\sin x)' - 0 = \sin x + x\cos x$

For $x \in [0, \pi/2]$ er både $\sin x$ og $\cos x$ større enn eller lik 0.

Sidan $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in [0, \pi/2]$, er funksjonen strengt veksande og har difor maksimalt eitt nullpunkt på intervallet.

Difor har f eitt og berre eitt nullpunkt for $x \in [0, \pi/2]$.

b) Løysinga x ligg mellom a og b der avstanden b−a blir halvert n gonger. Feilen blir altså $(b-a)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Om vi i tillegg vel midtpunktet som løysing til slutt, blir feilen

$$(b-a)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Skal ha:

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-5}$$

$$b-a < 10^{-5}\cdot 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} > 10^5\cdot(b-a)$$

$$(n+1)\ln 2 > \ln(10^5(b-a))$$

$$n > \frac{\ln(10^5(b-a))}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln(10^5(\pi/2-0))}{\ln 2} - 1$$

$$= 16.261$$

Vi treng $\underline{17}$ iterasjonar

c) og d)

Skriptet som gjer dette er gitt på dei neste sidene (4 og 6) - saman med svara. I oppg. d) har vi berre endra sjølve funksjonen som skal vere null og så har vi vald intervalla [-4, 0] og [0, 4].

Svar i c):

$x = 1.11416$

Svar i d):

$x = -3.30727$
eller
$x = 3.30727$

(Har berre vist pluss-løysinga på side 6).

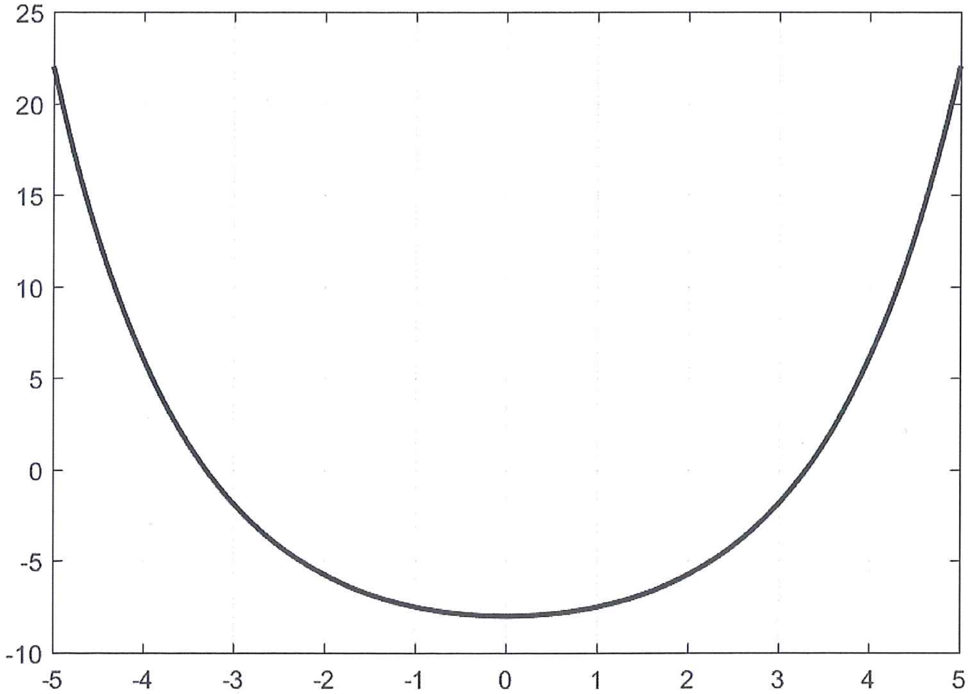
```matlab
% Skriptet implementerar halveringsmetoden
% Input er funksjonen, Funk, og grensene
% a og b. Desse er hardkoda.
% Presisjonen, P, er også input; også den er
% hardkoda.
% Skriptet kontrollerar ikkje at funksjonen
% faktisk har eit nullpunkt på intervallet.

% Funsjonen vi skal finne nullpunkt til:
Funk=@(x) x*sin(x)-1;

% Grensene - med funksjonsverdiar
% Her tar vi for gitt at Fa og Fb har motsett forteikn
a=0;
b=pi/2;
Fa=Funk(a);
Fb=Funk(b);

% Presisjon
Pres=1e-5;

while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;                % Nytt midtpunkt
  Fc=Funk(c);               % Funksjonsverdi i midtpunkt
  if Fa*Fc>0
    a=c;                    % Flyttar venstre grense til midtpunkt
  else
    b=c;                    % Flyttar høgre grense til midtpunkt
  end
end

% Vèl løysinga x til å vere nytt midtpunkt og skriv svaret til skjerm
format long
x=(a+b)/2
format
```

```
x =

   1.114155413113642
```

Published with MATLAB® R2016b

Til oppg. 1 d)

```
>> x=-5:1e-2:5;
>> plot(x,2.^x+2.^(-x)-10,'k-','linewidth',2)
>> grid on
```



```matlab
% Skriptet implementerar halveringsmetoden
% Input er funksjonen, Funk, og grensene
% a og b. Desse er hardkoda.
% Presisjonen, P, er også input; også den er
% hardkoda.
% Skriptet kontrollerar ikkje at funksjonen
% faktisk har eit nullpunkt på intervallet.

% Funsjonen vi skal finne nullpunkt til:
Funk=@(x) 2^x+2^(-x)-10;

% Grensene - med funksjonsverdiar
% Her tar vi for gitt at Fa og Fb har motsett forteikn
a=0;
b=4;
Fa=Funk(a);
Fb=Funk(b);

% Presisjon
Pres=1e-5;

while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;                 % Nytt midtpunkt
  Fc=Funk(c);                % Funksjonsverdi i midtpunkt
  if Fa*Fc>0
    a=c;                     % Flyttar venstre grense til midtpunkt
  else
    b=c;                     % Flyttar høgre grense til midtpunkt
  end
end

% Vèl løysinga x til å vere nytt midtpunkt og skriv svaret til skjerm
format long
x=(a+b)/2
format
```

```
x =

   3.307273864746094
```

Published with MATLAB® R2016b

e) $2^x + 2^{-x} = 10$

$2^x - 10 + 2^{-x} = 0$

$2^x(2^x - 10 + 2^{-x}) = 2^x \cdot 0$

$(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 1 = 0$

$$2^x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10^2 - 4\cdot 1 \cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2} = 5 \pm \sqrt{24}$$

$x \ln 2 = \ln(5 \pm \sqrt{24})$

$$x = \frac{\ln(5 \pm \sqrt{24})}{\ln 2}$$

$$x = \frac{\ln(5 - \sqrt{24})}{\ln 2} \approx -3.307279801 \text{ eller}$$

$$x = \frac{\ln(5 + \sqrt{24})}{\ln 2} \approx +3.307279801$$

At dei den eine løysinga er minus den andre kan vi sjå av at funksjonen vi skal finne null-punktet til, $g(x) = 2^x + 2^{-x} - 10$, er ein jamn funksjon: $g(-x) = g(x)$

Dersom $g(x) = 0$, er også $g(-x) = 0$.

For den positive løysinga er feilen

$$\left| \frac{\ln(5+\sqrt{24})}{\ln 2} - 3.3072739 \right| = \underline{5.94 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}}$$

Oppg. 2

$$a(x) = x^2 + x^{17} - \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} =$$

$$x^2 + x^{17} - x^{1/2} - x^{-2}$$

$$a'(x) = 2x^1 + 17x^{16} - \frac{1}{2}x^{1/2-1} - (-2)\,x^{-2-1} =$$

$$= 2x + 17x^{16} - \frac{1}{2}x^{-1/2} + 2x^{-3} =$$

$$\underline{2x + 17x^{16} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3}}$$

$$b(x) = 2\,e^x \ln x^2$$

Hvis $x > 0$: $b(x) = 2e^x \cdot 2\ln x = 4e^x \ln x$

$$b'(x) = 2\left((e^x)' \ln x^2 + e^x (\ln x^2)'\right) =$$

$$2\left(e^x \ln x^2 + e^x \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)'\right) =$$

$$2\,e^x \left(\ln x^2 + \frac{1}{x^2} \cdot 2x\right) =$$

$$\underline{2\,e^x \left(\ln x^2 + \frac{2}{x}\right)}$$

Hvis $x > 0$: $b'(x) = 2e^x\left(2\ln x + \frac{2}{x}\right) = 4e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

$$c(x) = \frac{\cos x + 1}{\sin(2x)} = \frac{(\cos x + 1)' \sin(2x) - (\cos x + 1)(\sin(2x))'}{(\sin(2x))^2}$$

$$= \frac{-\sin x \sin(2x) - (\cos x + 1)\,\cos(2x) \cdot (2x)'}{\sin^2(2x)}$$

$$= \underline{\frac{-\sin x \,\sin(2x) - 2(\cos x + 1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}}$$

Oppg. 3

a) Vi kan til dømes velge oss funksjonen frå oppg. 1:

$$f(x) = x\sin x - 1$$

$$f'(x) = 1\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' - 0 =$$

$$\sin x + x\cos x$$

Vidare kan vi velge $a = 1$

$$f'(a) = f'(1) = \underline{\sin 1 + \cos 1} \approx 1.38177$$

Skriptet og plottet for oppg. b) er vist på neste side.

For skriptet i oppg. c) (side 11), kunne vi ha avgrensa oss til nokre få små justeringar. Eg har vald å litt finare oppdeling for h. Eg har også vald å ta med eit plott som viser korleis estimata nærmar seg det eksakte for mindre og mindre h.

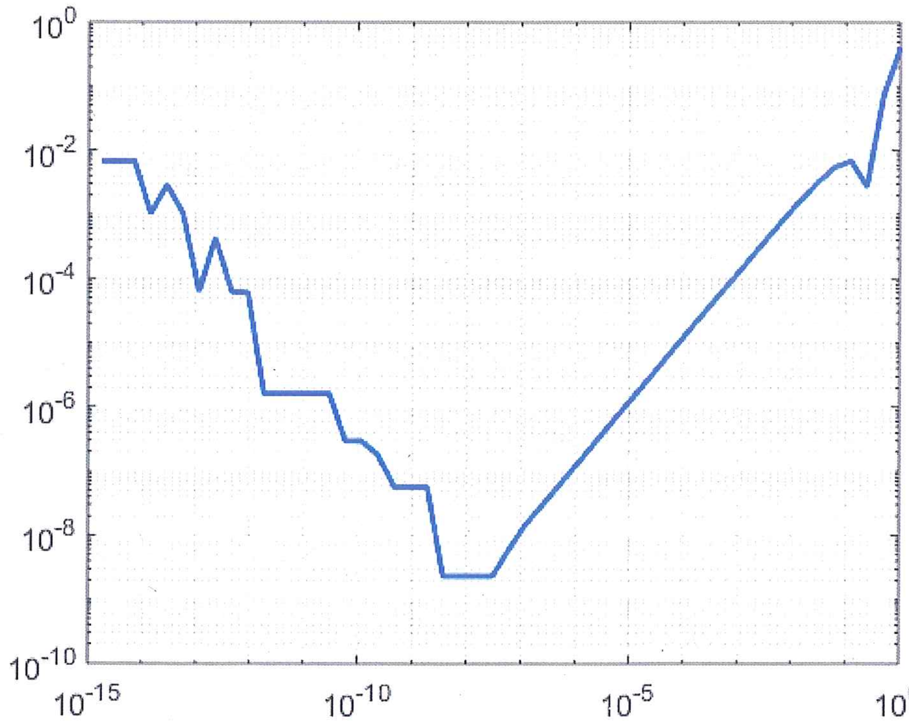
Svar a):

Av plottet på neste side ser vi at feilen er minimal for $h \approx 10^{-8}$. Feilen er då omtrent 10^{-9}.

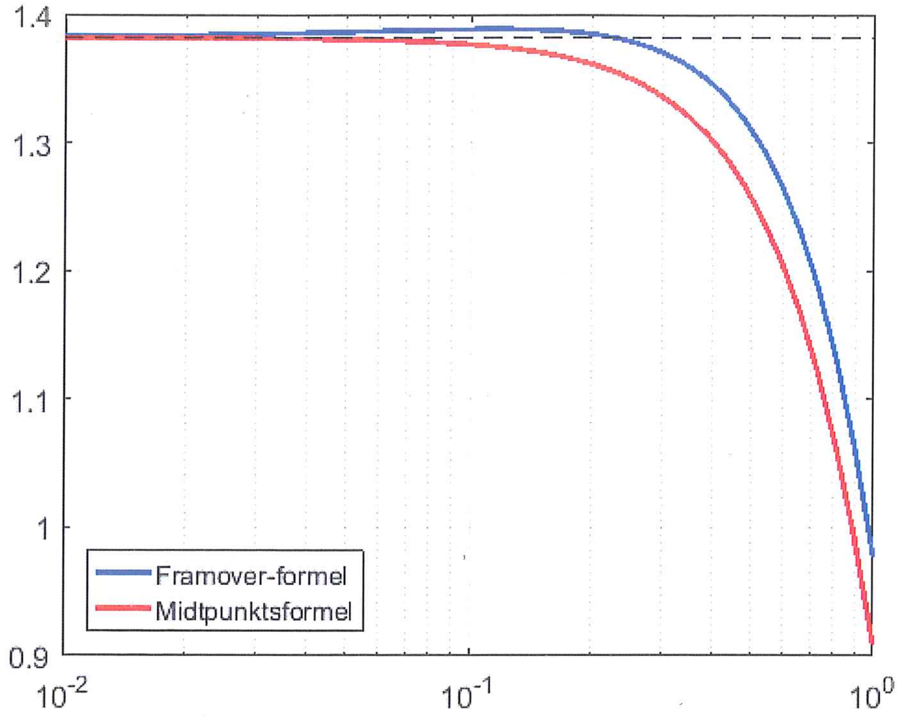
Svar b).

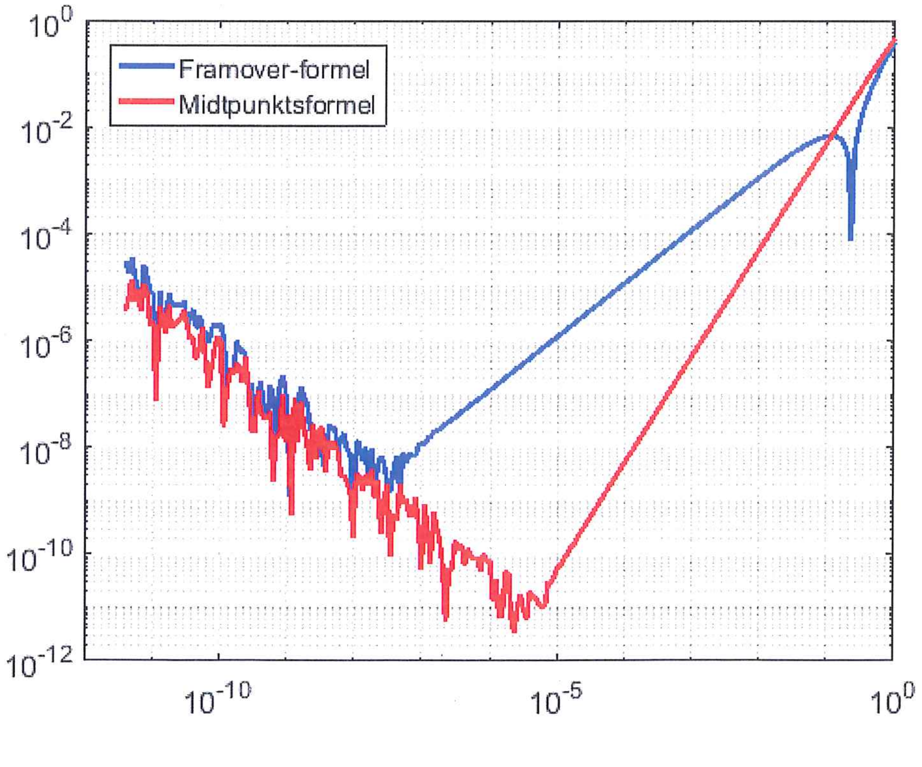
Med midtpunktsformelen er feilen minimal for $h \approx 10^{-5}$, og sjølve feilen er då omtrent 10^{-11}.

```
% Skript som plottar feilen i estimat av deriverte
% for ein funksjon.

%Funksjon
Funk=@(x) x*sin(x)-1;
% Punkt
a=1;
% Fasit
Fderiv=sin(a)+a*cos(a);

% Initerar h
h=1;

% Estimerar den deriverte
for n=1:50;
  hVektor(n)=h;
  FramFormel(n)=(Funk(a+h)-Funk(a))/h;
  h=h/2;
end

% Plottar feilen
loglog(hVektor,abs(FramFormel-Fderiv),'b-','linewidth',2)
grid on                                  % Rutenett
set(gca,'fontsize',12)                   % Skriftstorleik på aksane
```



```
% Skript som plottar feilen i estimat av deriverte
% for ein funksjon.
% Skriptet plottar feilen både for "framoverformelen",
% f'(a) \approx (f(a+h)-f(a))/h og for midtpunktsformelen:
% f'(a) \approx (f(a+h)-f(a-h))/(2h).
% I tillegg blir sjølve estimatet plotta.

%Funksjon
Funk=@(x) x*sin(x)-1;
% Punkt
a=1;
% Fasit
Fderiv=sin(a)+a*cos(a);

% Initerar h
h=1;

% Estimerar den deriverte
for n=1:250;
  hVektor(n)=h;
  FramFormel(n)=(Funk(a+h)-Funk(a))/h;
  MidtFormel(n)=(Funk(a+h)-Funk(a-h))/(2*h);
  h=h*.9;
end

% Plottar dei deriverte
figure(1)
semilogx(hVektor,FramFormel,'b-','linewidth',2)
hold on
semilogx(hVektor,MidtFormel,'r-','linewidth',2)
plot([1e-2 1],Fderiv*[1 1],'k--')
V=axis;
axis([1e-2 1 V(3) V(4)])                % Justerar x-aksen
hold off
% Forklaring av kurvene
legend('Framover-formel','Midtpunktsformel','location','southwest')
grid on                                 % Rutenett
set(gca,'fontsize',12)                  % Skriftstorleik på aksane


% Plottar feilen
figure(2)
loglog(hVektor,abs(FramFormel-Fderiv),'b-','linewidth',2)
hold on
loglog(hVektor,abs(MidtFormel-Fderiv),'r-','linewidth',2)
hold off
% Forklaring av kurvene
legend('Framover-formel','Midtpunktsformel','location','northwest')
grid on                                 % Rutenett
set(gca,'fontsize',12)                  % Skriftstorleik på aksane
V=axis;
axis([1e-12 1 V(3) V(4)])                % Justerar x-aksen
```


Framover-formel
Midtpunktsformel


Framover-formel
Midtpunktsformel

Oppg. 4

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1+e^{x-3}}, \quad D_f = [0, 5]$$

a) Ekstremalpunkt kan vere randpunkt eller punkt der den deriverte endrar forteiken.

Ut frå plottet på neste side, ser minimalverdien ut til å vere randpunktet $x=0$ og maksimalverdien ser vi ut til å ha for $x \approx 2.5$.

Randpunkt:

$$f(0) = 1 + \frac{0}{1+e^{0-3}} = 1$$

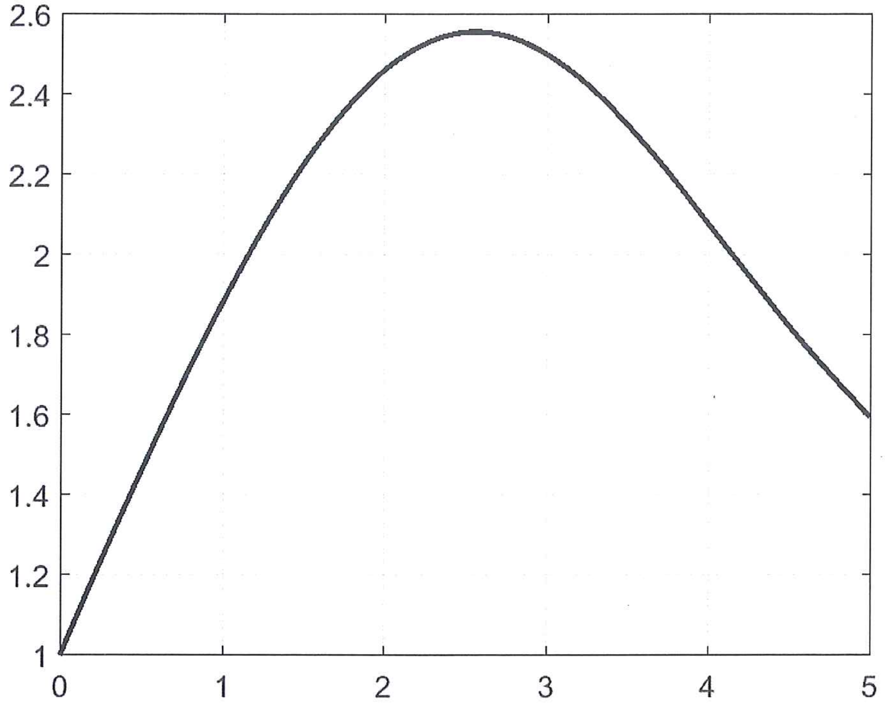
$$f(5) = 1 + \frac{5}{1+e^{5-3}} = 1 + \frac{5}{1+e^{2}} \approx 1.5960$$

Vi deriverar:

$$f'(x) = 0 + \frac{1\cdot(1+e^{x-3}) - x(0+e^{x-3}\cdot(x-3)')}{(1+e^{x-3})^2}$$

$$= \frac{1+e^{x-3} - xe^{x-3}\cdot 1}{(1+e^{x-3})^2} = \frac{1-e^{x-3}(x-1)}{(1+e^{x-3})^2}$$

```
>> x=0:1e-2:5;
>> f=1+x./(1+exp(x-3));
>> plot(x,f,'k-','linewidth',2)
>> set(gca,'fontsize',12)
>> grid on
```



$f'(x) = 0$

$$\frac{1-e^{x-3}(x-1)}{(1+e^{x-3})^2} = 0$$

$1 - e^{x-3}(x-1) = 0$

Vi løyser denne likninga ved hjelp av halveringsmetoden.

Med $x=0$ blir venstreside

$1 - e^{-3}\cdot(-1) = 1 + e^{-3} > 0$ og

med $x=5$ blir venstreside

$1 - e^{5-3}(5-1) = 1 - 4e^2 = -(4e^2-1) < 0$

Vi oppdaterer skripte frå oppg. 1 med funksjonen $1 - e^{x-3}(x-1)$ (linje 10) og grensen $a=0$ og $b=5$ (linje 15 og 16).

Sjå neste side.

Vi får svaret

$x = 2.55715$

$f(2.55715) = 2.55715 \quad (\approx x)$

Maksimalverdi: $\underline{2.55715}$

Minimalverdi: $\underline{1}$

```matlab
% Skriptet implementerar halveringsmetoden
% Input er funksjonen, Funk, og grensene
% a og b. Desse er hardkoda.
% Presisjonen, P, er også input; også den er
% hardkoda.
% Skriptet kontrollerar ikkje at funksjonen
% faktisk har eit nullpunkt på intervallet.

% Funsjonen vi skal finne nullpunkt til:
Funk=@(x) 1-exp(x-3)*(x-1);

% Grensene - med funksjonsverdiar
% Her tar vi for gitt at Fa og Fb har motsett forteikn
a=0;
b=5;
Fa=Funk(a);
Fb=Funk(b);

% Presisjon
Pres=1e-5;

while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;                  % Nytt midtpunkt
  Fc=Funk(c);                 % Funksjonsverdi i midtpunkt
  if Fa*Fc>0
    a=c;                      % Flyttar venstre grense til midtpunkt
  else
    b=c;                      % Flyttar høgre grense til midtpunkt
  end
end

% Vèl løysinga x til å vere nytt midtpunkt og skriv svaret til skjerm
format long
x=(a+b)/2
format
```

```
x =

   2.557153701782227
```

Published with MATLAB® R2016b

b) Numerisk, ved hjelp av t.d. halveringsmetoden, kan vi vise at $f(x)=x$ for toppunktet – opp til maskinpresisjon.

Men vi kan også vise det eksakt:

Maksimalpunktet er bestemt ved likninga $1-e^{x-3}(x-1)=0$

x_0 er ei løysing av denne:

$$1-e^{x_0-3}(x_0-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$e^{x_0-3}=\frac{1}{x_0-1}$$

Dette set vi inn i uttrykket for $f(x)$:

$$f(x_0)=1+\frac{x_0}{1+e^{x_0-3}}=1+\frac{x_0}{1+\frac{1}{x_0-1}}=$$

$$1+\frac{x_0(x_0-1)}{(1+\frac{1}{x_0-1})(x_0-1)}=1+\frac{x_0^2-x_0}{x_0-1+\frac{x_0-1}{x_0-1}}=$$

$$1+\frac{x_0^2-x_0}{x_0-1+1}=1+\frac{x_0^2-x_0}{x_0}=1+x_0-1=x_0$$

Altså: $\underline{f(x_0)=x_0}$.