Løysingsforslag til innlevering nr. 1

Dette løysingsforslaget er lava i noko som heiter Live Script i MATLAB. Dette grensesnittet kombinerar kommando/kode, output frå kode, tekst og formlar på ein smidig måte. Vurdér gjerne om dette er eit grensesnitt du vil bruke!

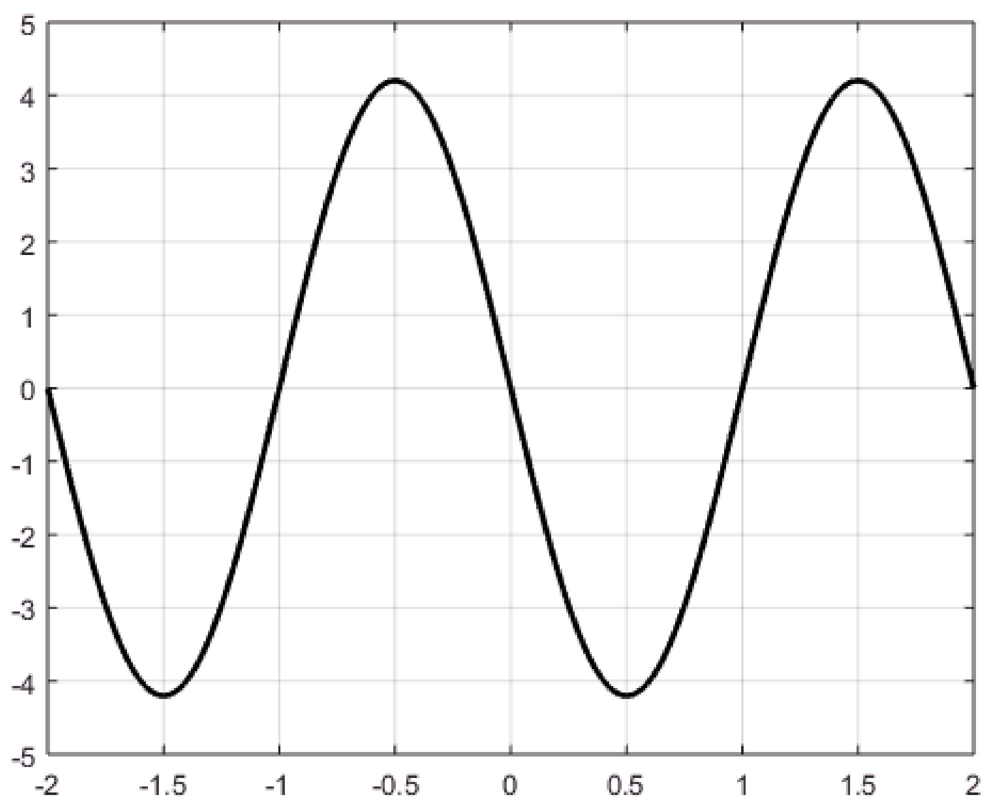
Ein bakdel med dette, er at det ikkje er heilt openberrt korleis ein ville gjort dette på den "vanlege" måten - med å kombinere kommandoar i kommando-vindauga og skript/funksjonsfiler.

I dette tilfellet ville eg nok ha gitt enkle kommandoar i kommandovindauga i oppgåve 1 og 2 og eit skript i oppgåve 3.

Oppgåve 1

a)

```
% Funksjonen
f=@(x) 4.2*sin(pi*(x-1));
x=-2:1e-2:2;
y=f(x);
figure(1)
plot(x,y,'k','linewidth',2)
grid on
```



b)

For eit uttrykk på forma $f(x) = a\sin(k(x - x_0))$ er a amplituen og perioden $p = \frac{2\pi}{k}$.

```
p=2*pi/pi
```

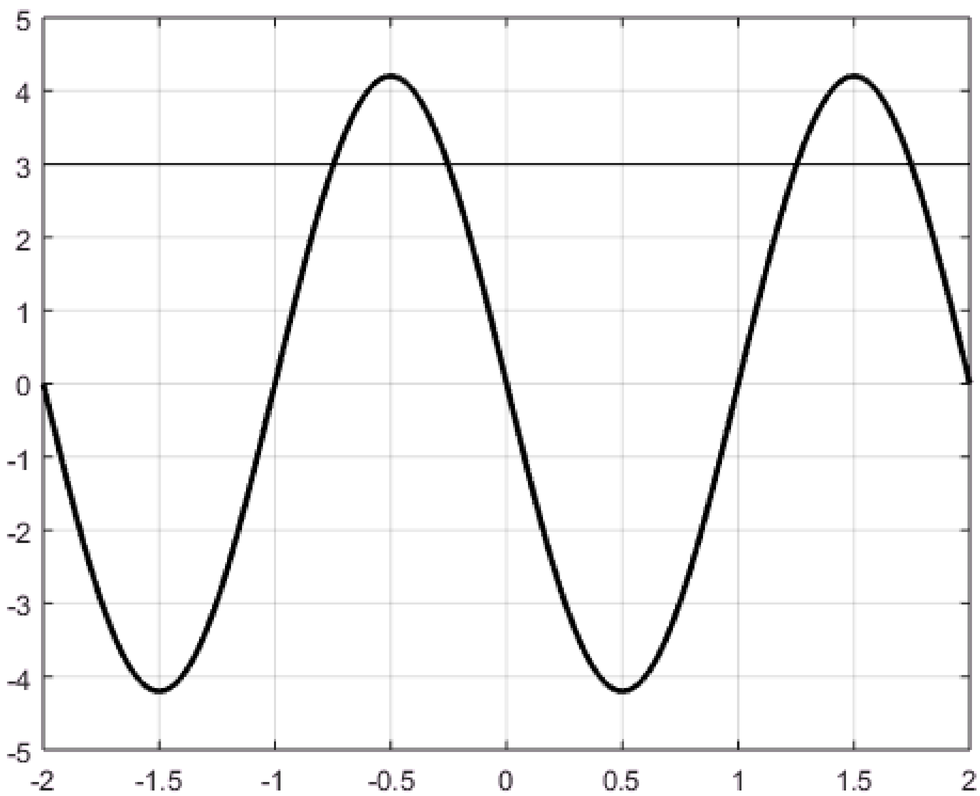
```
p = 2
```

Altså er amplituden 4.2 og perioden er 2.

c)

Om vi plottar linja y=3 først og ser på skjæringspunkta, får vi ein ide om kvar løysingane skal ligge:

```
figure(2)
plot(x,y,'k','linewidth',2)
grid on
hold on
plot([-2 2],[3 3],'k-')
```



$$
\begin{aligned}
&f(x) = 3\\
&4.2\sin(\pi(x-1)) = 3\\
&\sin(\pi(x-1)) = 3/4.2\\
&\pi(x-1) = \arcsin\frac{3}{4.2} + n\cdot 2\pi \quad \text{eller}\\
&\quad \pi(x-1) = \pi - \arcsin\frac{3}{4.2} + n\cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

der *n* er eit heiltal.

$$x - 1 = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{3}{4.2} + 2n \quad \text{eller} \quad x - 1 = 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{3}{4.2} + 2n$$
$$x = 1 + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{3}{4.2} + 2n \quad \text{eller} \quad x = 2 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{3}{4.2} + 2n$$

For *n*=0:

```
n=0;
x1=1+1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x1 = 1.2532
```

```
x2=2-1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x2 = 1.7468
```

For n=1:

```
n=1;
x3=1+1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x3 = 3.2532
```

```
x4=2-1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x4 = 3.7468
```

Desse svara fell utanfor intervallet

For n=-1

```
n=-1;
x5=1+1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x5 = -0.7468
```

```
x6=2-1/pi*asin(3/4.2)+2*n
```

```
x6 = -0.2532
```

For *n*<-1 vil løysingane også falle utanfor intervallet.

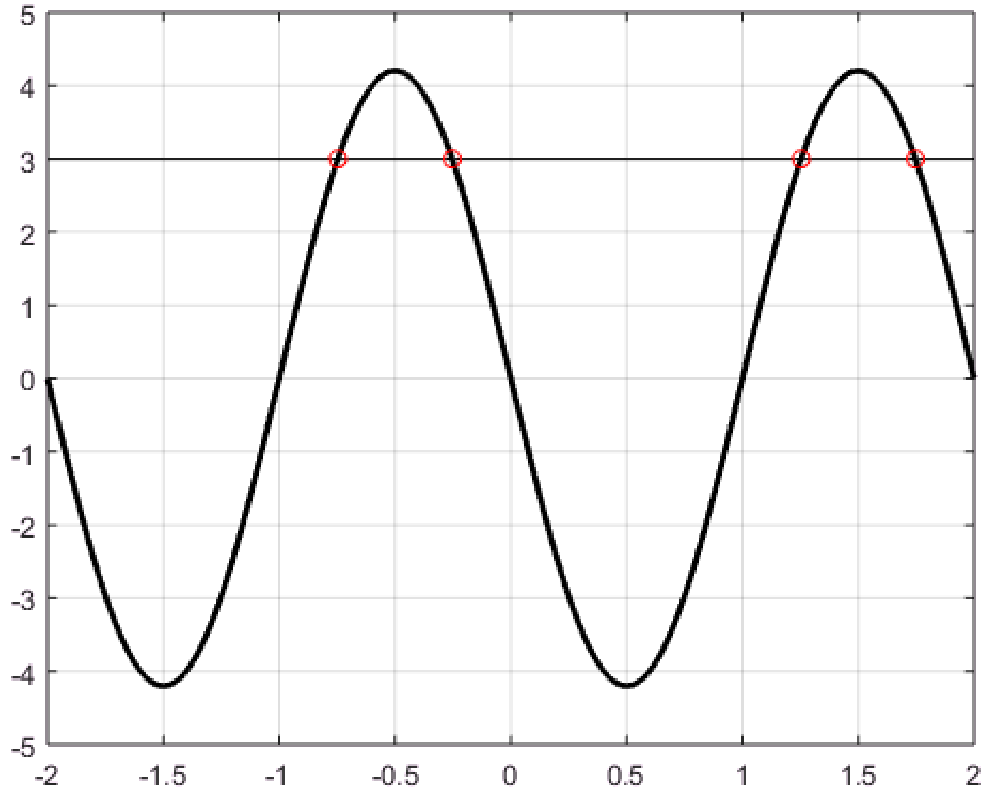
Svar:

x=-0.7468, x=-0.2532, x=1.2532 eller x=1.7468

Plottar inn løysingane:

```
figure(3)
plot(x,y,'k','linewidth',2)
grid on
hold on
plot([-2 2],[3 3],'k-')
plot(x1,3,'ro')
plot(x2,3,'ro')
```

```
plot(x5,3,'ro')
plot(x6,3,'ro')
hold off
```



Oppgåve 2

a)

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$$

For å bestemme polarforma av svara:

$$z = x + iy = r e^{i\theta} \quad \text{der}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{og} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Med våre tal:

$$r = \sqrt{2^2 + (\pm 3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta = \arctan\left(\pm\frac{3}{2}\right) = \pm\arctan\frac{3}{2}$$

$$z = \sqrt{13}\, e^{\pm i \arctan 3/2}$$

```
atan(3/2)
```

```
ans = 0.9828
```

Altså:

$$z = \sqrt{13}\, e^{\pm 0.9828i}.$$

Vi kan også gjere omrekninga reint numerisk i MATLAB:

```
z=2+3*i;
r=abs(z)
```

```
r = 3.6056
```

```
theta=angle(z)
```

```
theta = 0.9828
```

Altså: $z = 3.6056e^{0.9828i}$ eller $z = 3.6056e^{-0.9828i}$.

Kontrollerar svaret:

```
z=2-3*i;
z^2-4*z+13
```

```
ans = 0
```

```
z=2+3*i;
z^2-4*z+13
```

```
ans = 0
```

Vi fekk null for begge løysingane; svaret stemmer.

b)

$$\begin{aligned}
&3i - 2z = 2iz + 1 \\
&-2z - 2iz = 1 - 3i \\
&-z2(1 + i) = 1 - 3i \\
&z = -\frac{1 - 3i}{-2(1 + 1)} = -\frac{(1 - 3i)(1 - i)}{2(1 + i)(1 - i)} = \\
&-\frac{1 + 3i^2 - i - 3i}{2(1^2 - i^2)} = -\frac{1 - 3 - 4i}{2 \cdot 2} = -\frac{-2 - 4i}{4} = \frac{1}{2} + i
\end{aligned}$$

Polarform: $z = re^{i\theta}$ med $r = \sqrt{(1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}/2$ og $\theta = \arctan\frac{1}{1/2} = \arctan 2 \approx 1.1071$

Merk at fasen er direkte gitt ved arcus-tangens-verdien fordi talet ligg i første kvadrant i det komplekse planet.

Altså:

$$z = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{1.1071i}.$$

Kontrollerar svaret:

```
z=.5+i;
VS=3*i-2*z
```

```
VS =
  -1.0000 + 1.0000i
```

```
HS=2*i*z+1
```

```
HS =
  -1.0000 + 1.0000i
```

Vi ser at høgre og venstre side er like; løysinga stemmer.

c)

Vi begynnar med å skrive opp høgresida på polarform:

$$z^4 = 1 + i = \sqrt{1^2 + 1^2}\, e^{i \arctan 1} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + n\cdot 2\pi)}$$

der *n*, igjen, er eit heiltal.

Også her ligg det komplekse talet i første kvadrant i det komplekse planet - slik at fasen θ er direkte gitt ved arcus-tangens.

Vi tar fjerde-rota på begge sider:

$$z = \left(\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + n\cdot 2\pi)}\right)^{1/4} = 2^{1/8} e^{i(\pi/4 + n\cdot 2\pi)/4} = 2^{1/8} e^{i(\pi/16 + n\cdot \pi/2)}$$

$n = 0:$

$z = 2^{1/8} e^{i\pi/16}$

$n = 1:$

$z = 2^{1/8} e^{i(\pi/16 + \pi/2)} = 2^{1/8} e^{i9\pi/16}$

$n = 2:$

$z = 2^{1/8} e^{i(\pi/16 + 2\pi/2)} = 2^{1/8} e^{i17\pi/16}$

$n = 3:$

$z = 2^{1/8} e^{i(\pi/16 + 3\pi/2)} = 2^{1/8} e^{i25\pi/16}$

Vi finn dei kartesiske formene ved formelen $re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$. Vi lar MATLAB gjere jobben - og sjekke løysingane:

```
z0=2^(1/8)*exp(i*pi/16)
```

```
z0 =
   1.0696 + 0.2127i
```

```
z0^4
```

```
ans =
```

```
    1.0000 + 1.0000i
```

```
z1=2^(1/8)*exp(i*9*pi/16)
```

```
z1 =
  -0.2127 + 1.0696i
```

```
z1^4
```

```
ans =
   1.0000 + 1.0000i
```

```
z2=2^(1/8)*exp(i*17*pi/16)
```

```
z2 =
  -1.0696 - 0.2127i
```

```
z2^4
```

```
ans =
   1.0000 + 1.0000i
```

```
z3=2^(1/8)*exp(i*25*pi/16)
```

```
z3 =
   0.2127 - 1.0696i
```

```
z3^4
```

```
ans =
   1.0000 + 1.0000i
```

Vi ser at z^4 blir $1 + i$ for alle dei fire løysingane.

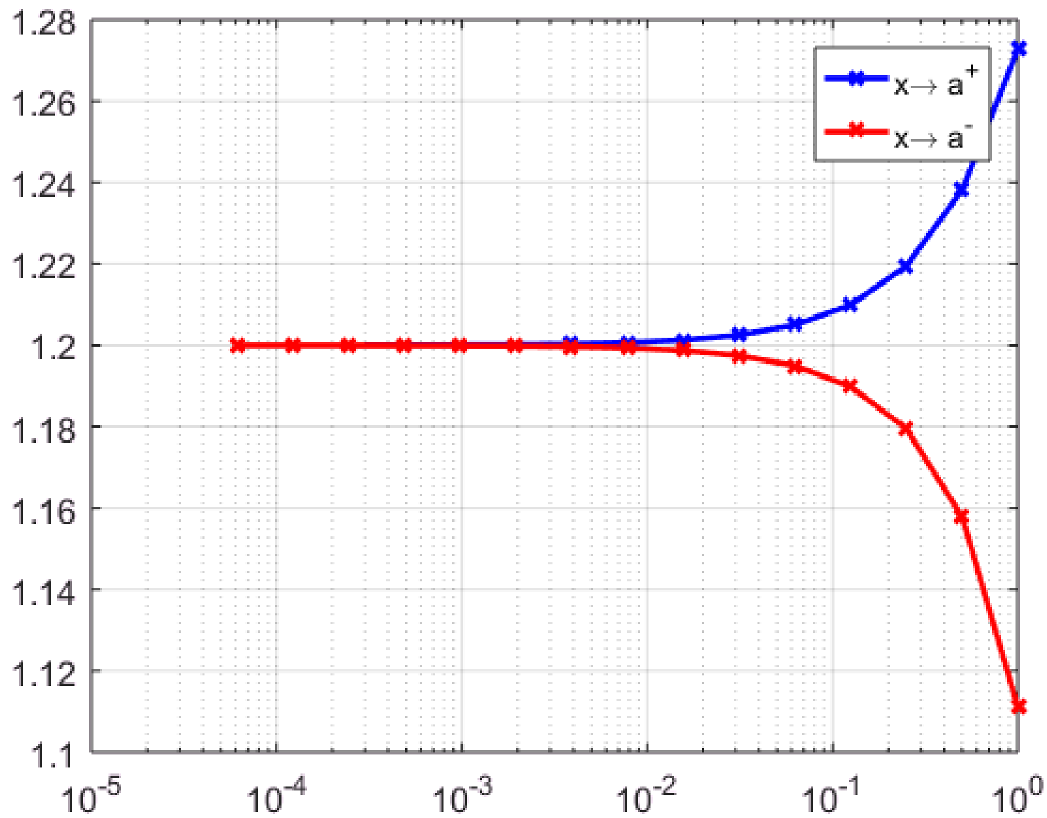
Oppgåve 3

a)

Vi lagar eit skript som plottar grensa med logaritmisk *x*-akse:

```
clear        % Reinskar minnet

% Funksjonen vi skal ta grensa av
funk=@(x) (2*x.^2-8*x-10)./(x.^2-25);
% Grensa x skal gå mot
a=5;

% Initerar h, der h er forskjellen mellom x og a
h=1;
```

```
for n=1:15;
  hVektor(n)=h;
  LimitOver(n)=funk(a+h);   % Estimerar grensa frå oversida
  LimitUnder(n)=funk(a-h);  % Estimerar grensa frå nedsida
  h=h/2;                    % Halverar h
end


% Plottar resultatet
figure(3)
semilogx(hVektor,LimitOver,'bx-','linewidth',2)
hold on
semilogx(hVektor,LimitUnder,'rx-','linewidth',2)
hold off
grid on                                  % Rutenett
legend('x\rightarrow a^+','x\rightarrow a^-')% Namn på plott
set(gca,'fontsize',12)                   % Større skrift
```



Av plottet ser vi at grensa ser ut til å ligge nær 1.2.

Dette får vi stadfesta om vi reknar grensa ut analytisk. Både teljar og nemnar går mot null når *x* går mot 5. Difor er *x*-5 faktor i begge polynoma - både teljaren og nemnaren. Nemnaren kan vi faktorisere ved 3. kvadratsetning: $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$.

Teljaren kan vi faktorisere ved polynomdivisjon eller ved å finne det andre nullpunktet. Vi gjer det siste:

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$
$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2} = 2 \pm 3$$
$$x = 2 - 3 = -1 \quad \text{eller} \quad x = 2 + 3 = 5$$
$$2x^2 - 8x - 10 = 2(x+1)(x-5).$$

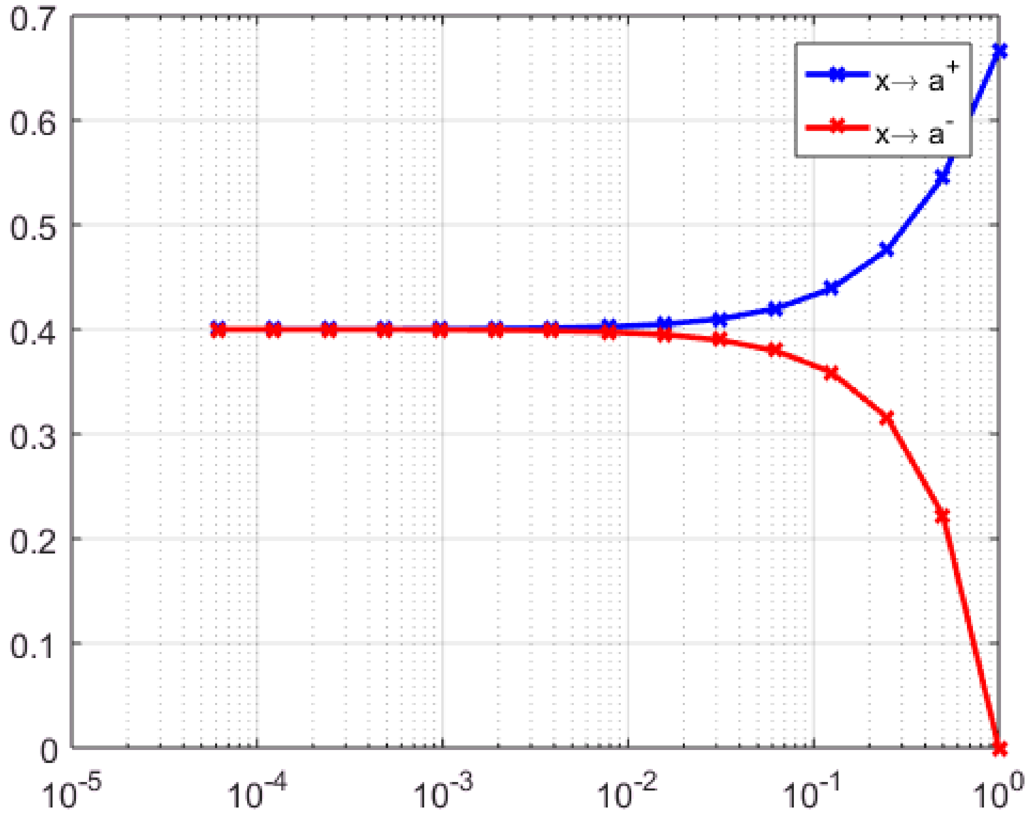
Grenseverdien blir:

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{2(x+1)(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \lim_{x \to 5} \frac{2(x+1)}{x+5} = \frac{2(5+1)}{5+5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

b)

Plottinga kan her gjerast ved å bytte ut a i skriptet over med 0:

```
clear        % Reinskar minnet

% Funksjonen vi skal ta grensa av
funk=@(x) (2*x.^2-8*x-10)./(x.^2-25);
% Grensa x skal gå mot
a=0;

% Initerar h, der h er forskjellen mellom x og a
h=1;

for n=1:15;
  hVektor(n)=h;
  LimitOver(n)=funk(a+h);   % Estimerar grensa frå oversida
  LimitUnder(n)=funk(a-h);  % Estimerar grensa frå nedsida
  h=h/2;                    % Halverar h
end


% Plottar resultatet
figure(3)
semilogx(hVektor,LimitOver,'bx-','linewidth',2)
hold on
semilogx(hVektor,LimitUnder,'rx-','linewidth',2)
hold off
grid on                                        % Rutenett
legend('x\rightarrow a^+','x\rightarrow a^-')% Namn på plott
set(gca,'fontsize',12)                         % Større skrift
```



Vi ser ut til å få 0.4 for grensa. Denne gongen er det lett å stadfeste analytisk at dette er eksakt rett løysing sidan funksjonen er kontinuerleg for x=0:

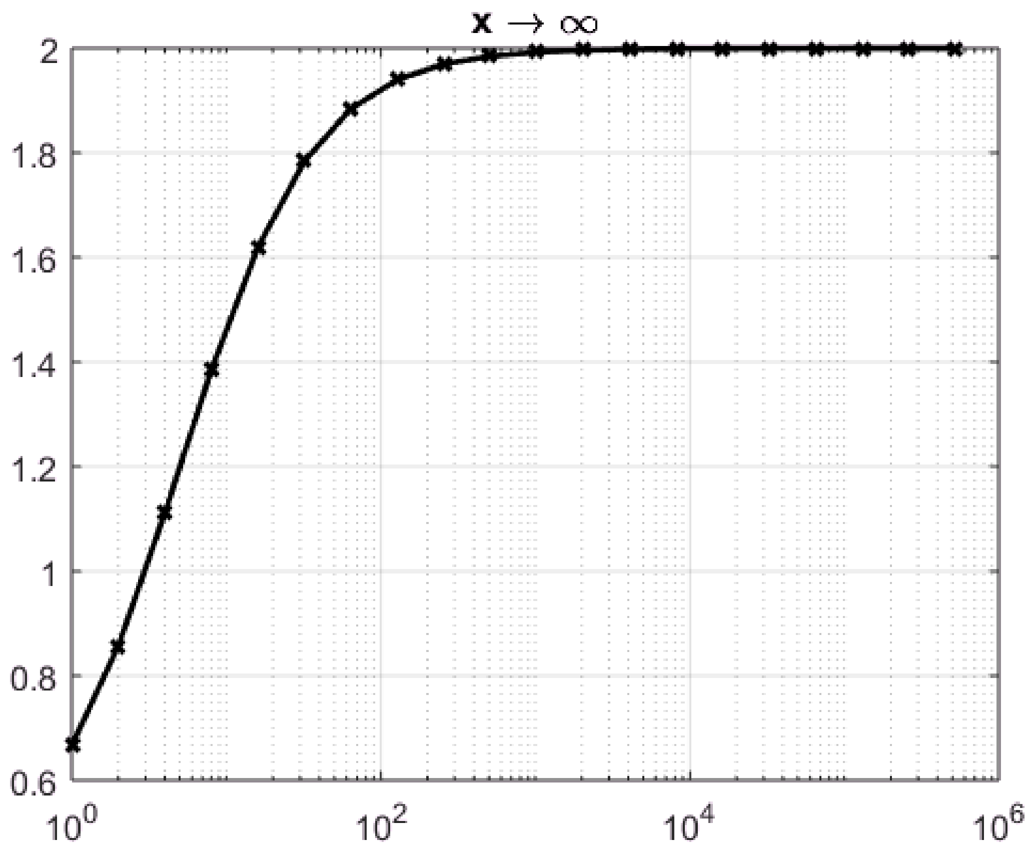
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25} = \frac{0 - 10}{0^2 - 25} = \frac{-10}{-25} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

c)

Vi juserar litt på skriptet over; variabelen a er ikkje interessant lenger - og h skal no bli større og større. Derfor fjernar vi a og doblar h for kvar iterasjon i staden for å halvere. Vidare er det uinteressant å snakke om noko grense frå oversida i denne samanhengen.

```
clear        % Reinskar minnet

% Funksjonen vi skal ta grensa av
funk=@(x) (2*x.^2-8*x-10)./(x.^2-25);

% Initerar h, der h er forskjellen mellom x og a
h=1;

for n=1:20;
  hVektor(n)=h;
  Limit(n)=funk(h);     % Estimerar grensa
  h=h*2;                % Doblar h
end

% Plottar resultatet
```

```
figure(3)
semilogx(hVektor,Limit,'kx-','linewidth',2)
grid on                                    % Rutenett
title('x \rightarrow \infty')              % Tittel (TeX-kode)
set(gca,'fontsize',12)                     % Større skrift
```



Vi ser ut til å få at uttrykket går mot 2 når *x* veks mot uendeleg. Igjen er dette eksakt rett:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x-10}{x^2-25}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2-8x-10)/x^2}{(x^2-25)/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-8/x-10/x^2}{1-25/x}=\frac{2-0-0}{1-0}=\underline{\underline{2}}.$$