Test-sett 3, DAFE 1000, vår 2018

Løsningsforslag

Oppg. 1

$$2 + z(1-i) = 2z + 1 - i$$

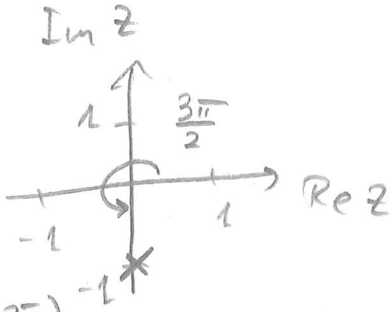
$$z(1-i) - 2z = 1 - i - 2$$

$$(-1-i)\,z = -1-i$$

$$z = \frac{-1-i}{-1-i} = \underline{1} \quad (= 1e^{i\cdot 0})$$

$$z^4 + i = 0$$

$$z^4 = -i$$



$$-i = 1\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)}$$

der er et heltall.

$$z^4 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)}$$

$$z = \left(e^{i\left(\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)}\right)^{1/4} = e^{i\frac{1}{4}\left(\frac{3\pi}{2} + n\cdot 2\pi\right)} = e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}\right)}$$

$n = 0$

$$z_0 = \underline{e^{i\frac{3\pi}{8}}}$$

$n=1:$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)} = \underline{e^{i\frac{7\pi}{8}}}$$

$n=2:$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\pi\right)} = \underline{e^{i\frac{11\pi}{8}}}$$

$n=3:$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{3}{2}\pi\right)} = \underline{e^{i\frac{15\pi}{8}}}$$

Oppg. 2

Av linje 12 og 1 ser vi at R er en Riemann-sum. Når N i linje økes, vil R nærme seg integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, der grensene a og b er gitt i linje 2 og 3 og integranden $f(x)$ er gitt i linje 1.

$$\int_0^2 (x^2 - \sin x)\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 + \cos x\right]_0^2 =$$

$$\tfrac{1}{3}\cdot 2^3 + \cos 2 - \left(\tfrac{1}{3}\cdot 0^3 + \cos 0\right) = \tfrac{8}{3} + \cos 2 - 1 = \underline{\tfrac{5}{3} + \cos 2}$$

Oppg. 3

$$x = \cos(2x)$$

$$f(x) = 0 \quad \text{med} \quad f(x) = x - \cos(2x)$$

Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - \cos(2x_n)}{1 + 2\sin(2x_n)}$$

Med $x_0 = 0.5$

$$x_1 = 0.5 - \frac{0.5 - \cos(2\cdot 0.5)}{1 + 2\sin(2\cdot 0.5)} = 0.51502$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - \cos(2x_1)}{1 + 2\sin(2x_1)} = 0.51493$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - \cos(2x_2)}{1 + 2\sin(2x_2)} = 0.51493$$

Altså: $\underline{x = 0.515}$ (med tre rette siffer)

Oppg. 4

a) $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 1\cdot 1 + (-2)\cdot -1 \\ 0\cdot 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 3 & 0\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) \\ 0\cdot 2 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot(-2) + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) = \underline{-2}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \quad -3 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

Alternativt:

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 \cdot 3 = \underline{0}$$

b) $(A | I_3) \sim (I_3 | A^{-1})$

Siden $\det(A) \neq 0$, veit vi at A er invertibel

$$(A | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ 2 \quad -2 \leftarrow (-1) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kontroll:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 & 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 & -2 - \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 \\ 0 & 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 & 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 \\ 0 & 0 & (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Ok

Oppg. 5

$H = D = 2\,dm$

Volum av vann:

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

Formlike: $\frac{D}{H} = \frac{2r}{h}$

$$r = \frac{1}{2}h \cdot \frac{D}{H} = \frac{1}{2}h \cdot \frac{2dm}{2dm} = \frac{h}{2}$$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{12} h^3$$

Både V og h er tidsavhengige.

Gitt: $V'(t) = -0.3\ dm^3/s$ når $h = 1.5\ dm$

-Skal finne $-h'(t)$

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h'(t) = \frac{\pi}{4} h^2 h'(t)$$

$$h'(t) = \frac{4V'(t)}{\pi h^2}$$

$$-h'(t) = \frac{4 \cdot (-V'(t))}{\pi h^2} = \frac{4 \cdot 0.3\ dm^3/s}{\pi \cdot (1.5\ dm)^2} =$$

$$0.16977\ dm/s \approx \underline{1.70\ cm/s}$$

Oppg. 6

$$\int \sqrt{2x+3}\, dx = \int (2x+3)^{1/2}\, dx =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+3)^{1/2+1} + C = \underline{\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2} + C}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x + C.$$

$u = x^2+1$ gir $\frac{du}{dx} = 2x$ slik at $dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x}{u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$$

$\frac{1}{2}\ln|u| + C'' = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C'$

Vi får at

$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \underline{\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C'}$

Oppg. 7

Det teoretiske grunnlaget for halveringsmetoden er skiferingssetninga, som garanterer at $f(x)$ har eit nullpunkt på intervallet (a, b) dersom $f(a)$ og $f(b)$ har motsette forteiken og f er kontinuerleg. Her er $f(x) = x^2 + \cos x$ (linje 1), $a = -\pi/2$ og $b = +\pi/2$ (linje 2 og 3).

$f(a) = f(-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2})^2 + \cos(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$

$f(b) = f(+\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$

$f(a)$ og $f(b)$ har <u>same</u> forteiken. Difor kan vi ikkje rekne med at halveringsmetoden fungerar her.

Oppg. 8

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

- Går ut frå at $y = e^{rx}$ slik at $y' = re^{rx}$ og $y'' = r^2 e^{rx}$.

Set inn:

$$r^2 e^{rx} - 2re^{rx} + 5e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(r^2 - 2r + 5) = 0$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0, \quad r = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = 1 \pm 2i$$

Generell løysing: $y(x) = e^x (A\cos(2x) + B\sin(2x))$

Oppg. 9

I linje 9 ser vi at man bruker midtpunktsformelen for numerisk derivasjon for å estimere $f'(a)$ der funksjonen f er gitt i linje 1 og a er gitt i linje 2. h blir stadig redusert (linje 10) og til slutt blir feilen i estimatet plotta. D er det eksakte svaret (i alle fall innenfor maskinpresisjonen).

Altså:

$D = f'(a)$ der $f(x) = e^{2x} - x$ og $a = 1$.

$f'(x) = 2e^{2x} - 1$

$D = f'(1) = \underline{2e^2 - 1}$.