Test-sett 2

DAFE 1000, vår -18

Løysingsforslag

Oppg. 1

a) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{2} \\ \leftarrow -\frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + z = 1$
$y - z = -2$
z er fri

Generell løysing:

$x = 1 - z$
$y = -2 + z$
z er fri

b) $$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 = \underline{-1}$$

Alternativt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot0\cdot1 + 1\cdot2\cdot2 + 0\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 0\cdot0\cdot2$$

$$= 0+4+0-4-1-0 = \underline{-1}$$

For å bestemme A^{-1}: $(A \mid I_3) \sim (I_3 \mid A^{-1})$

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 4 \;\; -2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid A^{-1}), \quad A^{-1} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ er invertibel fordi

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3-4 = -1 \neq 0.$$

Formelen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ gir

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1-2 & -2+0 & 0+2 \\ 4+6 & 8-0 & 0-6 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 10 & 8 & -6 \end{pmatrix}}$$

Oppg. 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-1}}{2x^2-2x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4-1} : x^2}{(2x^2-2x-\sqrt{2}):x^2} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 (x^4-1)}}{2-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}}{2-\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{2}}{x^2}} =$$

$$\frac{1-0}{2-0-0} = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Dette er definisjonen av den deriverte av funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = f'(x) = (\sqrt{x})' = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Grenseverdien kan også bestemmast direkte på denne måten:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Oppg. 3

$\Delta x = 0.010$ cm er tjukkelsen på tapen.
$a = 3.0$ cm, $b = 5.0$ cm

Lengde av tapen kan bestemmast på fleire måter.

1) Det enklaste er kanskje å sjå på areal. Arealet av tapen sett frå sida blir arealet av den store sirkelen minus den vesle:

$A = \pi b^2 - \pi a^2.$

Om vi strekker ut tapen blir det eit langt rektangel. Areala må vere det same;

$A = l \Delta x$, der l er lengda.

Altså: $\pi b^2 - \pi a^2 = l \Delta x$

$$l = \frac{\pi}{\Delta x}(b^2 - a^2) = \frac{\pi}{0.010\,\text{cm}}(5.0^2\,\text{cm}^2 - 3.0^2\,\text{cm}^2)$$

$$= 5026.5\ \text{cm} \approx \underline{50.3\ \text{m}}$$

2) Om ein ikkje ser dette, kan vi likevel bestemme lengda. Om vi tenkjer oss at vi rullar opp tapen, blir lengda for kvar vinding omkretsen av ein sirkel – med stadig større radius. Radiusen r startar på a, aukar med Δx for kvar vinding og endar på b. Lengda blir såleis ein sum:

$$\ell = \sum_{i=0}^{N} 2\pi x_i \quad \text{der} \quad x_i = a + i \cdot \Delta x \quad \text{og}$$

$$N = \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta x} \right\rfloor$$

2a) Summen kan skrivast om som ein Riemann-sum og så estimerast med eit integral:

$$\ell = \sum_{i=0}^{N} 2\pi x_i = 2\pi \sum_{i=0}^{N} x_i = \frac{2\pi}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N} x_i \cdot \Delta x$$

$$\approx \frac{2\pi}{\Delta x} \int_a^b x \, dx = \frac{2\pi}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_a^b = \frac{\pi}{\Delta x} (b^2 - a^2)$$

2b) Vi kan bruke denne formelen til å bestemme summen: $\sum_{i=0}^{N} i = \frac{N(N+1)}{2}$.

$$\ell = \sum_{i=0}^{N} 2\pi x_i = 2\pi \sum_{i=0}^{N} (a + i \cdot \Delta x) =$$

$$2\pi \left(a \sum_{i=0}^{N} 1 + \Delta x \sum_{i=0}^{N} i \right) =$$

$$2\pi\left(a\cdot(N+1)+\Delta x\,\frac{N(N+1)}{2}\right)$$

$$N=\left\lfloor\frac{b-a}{\Delta x}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{5.0-3.0}{0.010}\right\rfloor=\lfloor 200\rfloor=200.$$

Her er $\frac{b-a}{\Delta x}$ tilfeldigvis eit heiltal, så vi kan sette $N=\frac{b-a}{\Delta x}$ (utan „$\lfloor\ \rfloor$").

$$l=2\pi\left(a\left(\frac{b-a}{\Delta x}+1\right)+\Delta x\cdot\frac{\frac{b-a}{\Delta x}\left(\frac{b-a}{\Delta x}+1\right)}{2}\right)=$$

$$2\pi\left(\frac{b-a}{\Delta x}+1\right)\left(a+\frac{\Delta x}{2}\,\frac{b-a}{\Delta x}\right)=$$

$$\frac{2\pi}{\Delta x}(b-a+\Delta x)\,\frac{1}{2}(b+a)$$

$$\frac{\pi}{\Delta x}(b-a)(b+a)+\pi(b+a)=$$

$$\frac{\pi}{\Delta x}(b^2-a^2)+\pi(b+a)$$

$$=\frac{\pi}{0.010\,\text{cm}}\left(5.0^2\,\text{cm}^2-3.0^2\,\text{cm}^2\right)+\pi\cdot(5.0+3.0)\,\text{cm}$$

$$=5051.68\,\text{cm}\approx\underline{50.5\,\text{m}}$$

2c) Vi kan skrive eit lite skript som reknar ut summen for oss. I MATLAB kan skriptet sjå slik ut:

```
a=3.0; b=5.0; dx=0.010;        % input
l=0;                           % initierar
x=a;
while x<b
    l=l+2*pi*x;                % legg til omkrets
    x=x+dx;                    % oppdaterer x
end
l                              % svar til skjerm
```

Oppg. 4

Sidan vi har eit odde tal på punkt, kan vi bruke Simpsons metode til å estimere integralet:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx \frac{0.25}{3}\left(f(1)+4f(1.25)+2f(1.5)+4f(1.75)+f(2)\right)$$

$$= \frac{0.25}{3}(1+4\cdot 1.118+2\cdot 1.225+4\cdot 1.323+1.414) = \underline{1.2190}$$

Alternativt kan vi bruke trapesmetoden, men då blir nok svare litt mindre nøyaktig:

$$\int_1^2 f(x)\,dx \approx 0.25\left(\tfrac{1}{2}f(1)+f(1.25)+f(1.5)+f(1.75)+\tfrac{1}{2}f(2)\right)$$

$$= 0.25\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 1+1.118+1.225+1.323+\tfrac{1}{2}\cdot 1.414\right) = \underline{1.2183}$$

Forskjellen mellom det som dei to metodane gav, er veldig liten.

Funksjonen er forresten $f(x)=\sqrt{x}$, så eksakt svar er

$$\int_1^2 x^{1/2}\,dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_1^2 =$$

$$\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right) = 1.218951$$

Oppg. 5

a) Av linje 17, 18 og 2 ser vi at dette er Eulers metode.

Denne metoden går ut på å estimere løysinga av startverdiproblemet

$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$

ved å iterere på

$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h, \quad x_n = x_0 + n \cdot h$

der $y_n \approx y(x_n)$ når h er liten.

$F(x,y)$ finn vi i linje 2 og startkravet er gitt i linje 4:

$\underline{y' = xe^{-y}, \quad y(0) = 0}$

Eulers midtpunktsmetode er vanlegvis langt meir nøyaktig:

$y_{n+1} = y_n + F(\hat{x}_n, \hat{y}_n)$ der

$\hat{x}_n = x_n + h/2$ og $\hat{y}_n = y_n + F(x_n, y_n)h/2$.

Dette kan implementerast ved å legge følgande inn mellom linje

16 og 17:

```
xHatt = x + h / 2;
yHatt = y + Funk(x,y) * h / 2;
```

og erstatte linje 18 med

```
y = y + Funk( xHatt, yHatt) * h;
```

b) Dette skriptet implementerar Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Det ser vi av linje 9 og ved å konstatere at funksjonen definert i linje 3 er den deriverte funksjonen definert i linje 2:

$(x + e^x)' = 1 + e^x.$

Metoden går ut på å løyse likninga $f(x) = 0$, der $f(x)$ er gitt i linje 2:

$\underline{x + e^x = 0}.$

I linje 8 ser vi at det blir utført 3 iterasjonar før svaret blir skrive til skjerm.

$x_0 = 0$ (linje 6)

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0 + e^{x_0}}{1 + e^{x_0}} = 0 - \frac{0 + e^0}{1 + e^0} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 + e^{x_1}}{1 + e^{x_1}} = -0.566311$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 + e^{x_2}}{1 + e^{x_2}} = \underline{-0.567146}$$

Det er altså x_3 som blir skriven til skjerm.

Oppg. 6

a) $y' = x e^{-y}, \quad y(0) = 0$

(Startverdiproblemet frå oppg. 5a.)

Differensiallikninga er separabel:

$$\frac{dy}{dx} = x e^{-y}$$

$$e^y dy = x dx$$

$$\int e^y dy = \int x dx$$

$$e^y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) \quad \text{(generell løysing)}$$

Startkrav: $y(0) = 0$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\cdot 0^2 + C'\right) = 0$$
$$\ln C' = 0$$
$$C' = e^0 = 1$$

$$\underline{y(x) = \ln\left(\tfrac{1}{2}x^2 + 1\right)}$$

b) $y'(x) = x e^{-x}, \quad y(0) = 1$

$$y = \int y'(x)\,dx = \int x e^{-x}\,dx$$

Delvis integrasjon: $\int u v'\,dx = uv - \int u' v\,dx$

$u = x$, $v' = e^{-x}$ gir $u' = 1$, $v = -e^{-x}$

$$y = \int x e^{-x}\,dx = x\cdot(-e^{-x}) - \int 1\cdot(-e^{-x})\,dx =$$
$$-x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C' =$$
$$-e^{-x}(x+1) + C'$$

Startlerav: $y(0) = 1$

$$-e^{-0}(0+1) + C' = 1$$
$$-1 + C' = 1, \quad C' = 2$$

$$\underline{y(x) = -e^{-x}(x+1) + 2}$$