Løysingsforslag til test-sett 1

DAFE 1000

Oppg. 1

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}, \quad D_f = [0, 4]$$

a) Maksimalpunktet: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x^2) - \sqrt{x}\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x^2) - \sqrt{x}\cdot 2x\right)2\sqrt{x}}{(1+x^2)^2\cdot 2\sqrt{x}}$$

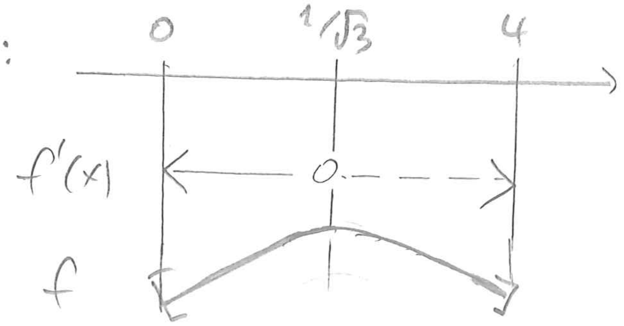
$$= \frac{1+x^2-4x^2}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)^2} = \frac{1-3x^2}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)^2} = \frac{(1-\sqrt{3}x)(1+\sqrt{3}x)}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - 3x^2 = 0 \iff x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Med $x \in D_f = [0,4]$: $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774$

Forteiknsskjema:



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}}{1+\sqrt{1/3}^{\,2}} = \frac{1/3^{1/4}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3^{1/4}}\cdot 3}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot 3} = \frac{3^{3/4}}{4} \approx 0.5699$$

Maksimalpunkt: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3^{3/4}}{4}\right)$

Av forteiknsskjemaet (og grafen) ser vi at randpunkta er lokale minimalpunkt

$f(0) = 0, \quad f(4) = \frac{\sqrt{4}}{1+4^2} = \frac{2}{17}$

Minimalpunkt: $(0,0)$ og $\left(4, \frac{2}{17}\right)$.

b) Volum: $V = \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\right)^2 dx =$

$\pi \int_0^4 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$

Variabelbyte: $u = 1+x^2$, $\frac{du}{dx} = 2x$, $dx = \frac{1}{2x} du$

$u(0) = 1$, $u(4) = 17$

$$V = \pi \int_1^{17} \frac{x}{u^2} \frac{1}{2x} du = \frac{\pi}{2} \int_1^{17} u^{-2} du =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{-2+1} u^{-2+1}\right]_1^{17} = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{u}\right]_1^{17} =$$

$$-\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{17} - \frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{16}{17} = \frac{8\pi}{17}$$

Oppg. 2

$y' + \frac{1}{x} y = x, \quad y(1) = 0$

a) Oppgåva kan løysast ved rein innsetting.

$y = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$ oppfyller startkravet:

$y(1) = \frac{1}{3}(1^2 - \frac{1}{1}) = 0$ OK

$y' = (\frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{x}))' = \frac{1}{3}(2x - (-x^{-2})) =$

$\frac{1}{3}(2x + \frac{1}{x^2})$

Sett inn i differensiallikninga:

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{3}(2x + \frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{x}) =$

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3x^2} = x$ OK.

Alternativt kan vi løyse differensiallikninga ved hjelp av integrerande faktor.

Denne er $e^{F(x)}$ der $F'(x) = \frac{1}{x}$

- Vel $F(x) = \ln x$ $(x>0)$ slik at

$e^{F(x)} = e^{\ln x} = x$

Vi får

$x(y' + \frac{1}{x}y) = x \cdot x$

$(xy)' = x^2$

$xy = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C'$

$y = \frac{1}{x}(\frac{1}{3}x^3 + C') = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C'}{x}$

Startkrav: $y(1) = 0$

$\frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{C'}{1} = 0$, $C' = -\frac{1}{3}$

$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{-\frac{1}{3}}{x} = \underline{\frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{x})}$

b) I punktet $x_1 = 1.25$ har vi at

$$y'(x_1) \approx \frac{y(x_1+h) - y(x_1-h)}{2 \cdot h}$$

Med $h = 0.25$ og $y(x_0) = y(1) = 0$ får vi:

$$y'(x_1) \approx \frac{y(x_2) - y(x_0)}{0.5} = 2(y_2 - 0) = 2y_2$$

Dette set vi inn i differensial-likninga:

$$y'(x_1) + \frac{1}{x_1} y(x_1) = x_1$$

$$2y_2 + \frac{1}{1.25} y_1 = 1.25$$

$$\underline{\frac{1}{1.25} y_1 + 2y_2 = 1.25}$$

For $x_2 = 1.5$: $y'(x_2) \approx \frac{y(x_2+h) - y(x_2-h)}{2h} = \frac{y(x_3) - y(x_1)}{0.5}$

slik at

$$2(y_3 - y_1) + \frac{1}{x_2} y_2 = x_2$$

$$\underline{-2y_1 + \frac{1}{1.5} y_2 + 2y_3 = 1.5}$$

I x_3: $y'(x_3) \approx 2(y_4 - y_2)$ slik at

$$2(y_4 - y_2) + \frac{1}{x_3} y_3 = x_3$$

$$\underline{-2y_2 + \frac{1}{1.75} y_3 + 2y_4 = 1.75}$$

Til sist brukar vi den andre formelen for numerisk derivasjon:

$$y'(x_4) \approx \frac{y_2 - 4y_3 + 3y_4}{2h} = 2(y_2 - 4y_3 + 3y_4)$$

slik at

$$2(y_2-4y_3+3y_4)+\frac{1}{x_4}y_4=x_4 \quad \text{der} \quad x_4=2$$

$$\underline{2y_2-8y_3+6.5\,y_4=2}$$

c) MATLAB-kommandoane gir løysinga av likningssettet $A\vec{y}=\vec{b}$ der

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{1.25} & 2 & 0 & 0 \\ -2 & \frac{1}{1.5} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{1}{1.75} & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 6.5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b}=\begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.5 \\ 1.75 \\ 2 \end{pmatrix},$$

som er det same som likningssystemet frå b).
Løysinga, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, les vi ut frå siste søyla i det som rref-funksjonen gir. Av dette ser vi at

$$y_4=y(2)\approx \underline{1.1634}.$$

Eksakt svar finn vi ved å setje inn i $y(x)$ frå a) – den eksakte løysinga:

$$y(2)=\frac{1}{3}\left(2^2-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}=\underline{\frac{7}{6}}\approx 1.1667$$

Feil i estimatet: $\left|1.1634-\frac{7}{6}\right|=0.00327$
(0.28%)

Oppg. 3

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot(-2) \\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 2 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 0+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}$$

Sidan A og B har ulike format, er ikkje A+2B definert.

Sidan A har 3 søyler og B har 2 rekker, er ikkje AB definert.

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 2-2\cdot 1 & 1\cdot 3-2\cdot 2 \\ 3\cdot 1+0 & 3\cdot 2-1 & 3\cdot 3-2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}}$$

Oppg. 4

Forutsetningene for at halveringsmetoden fungerar er at funksjonen som vi skal finne nullpunktet til, $f(x)$, er kontinuerleg på heile det aktuelle intervallet, $[a, b]$, og at $f(a)$ og $f(b)$ har motsette forteikn.

Her er $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$ (linje 2),

$a=0$ (linje 4) og $b=2$ (linje 5).

$f(x)$ er ikkje definert på heile $[0,2]$; vi får null i nemnar for $x=\sqrt{2} \approx 1.4142$.

Difor er ikkje føresetnadane for å bruke metoden til stades.

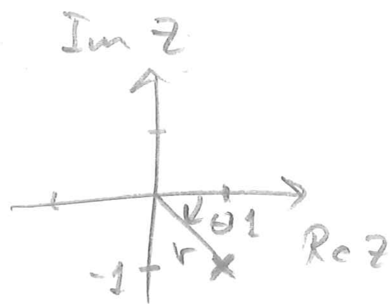
Om vi aukar presisjonen (linje 9), vil „løysinga" nærme seg $\sqrt{2}$, som altså ikkje er noko løysing i det heile.

Oppg. 5

$$z^3 = 1-i = re^{i\theta}$$

der $r=\sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ og

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$$



Av figuren ser vi at θ skal ligge i fjerde kvadrant, slik at vi kan sette $\theta = \arctan -1 = -\frac{\pi}{4}$

Altså:

$$z^3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\, e^{-i(\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi)} \quad \text{der } n\in\mathbb{Z}.$$

$$z = \left(\sqrt{2}\, e^{-i(\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi)}\right)^{1/3} = \left(2^{1/2}\right)^{1/3}\cdot e^{-i\frac{1}{3}(\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi)}$$

$$z = 2^{1/6} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + n\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$n=0$:

$$z_0 = \underline{2^{1/6} e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

$n=1$:

$$z_1 = 2^{1/6} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{7\pi}{12}}}$$

$n=2$:

$$z_3 = 2^{1/6} e^{i\left(-\frac{\pi}{12} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{2^{1/6} e^{i\frac{15\pi}{12}}}$$

Oppg. 6

Av linje 8 og 9 ser vi at akselerasjonen, som er den deriverte av farten, blir estimert med „framoverformelen",

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ der $h = 0.5$ i vårt tilfelle (linje 3).

Dette er eit ganske dårleg estimat. Men om vi brukar midtpunktformelen i punktet $x = a + h/2$ med $h/2$ i staden for h, får vi

$$f'(a+h/2) \approx \frac{f(a+h/2+h/2) - f(a+h/2-h/2)}{2\cdot h/2}$$

$$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Høgresida er altså den same, men no estimerar ho $f'(a+h/2)$, ikkje $f'(a)$, og estimatet er langt betre.

Det einaste vi treng å endre i koden er linje 14:

```
plot(Tid(1:(N-1))+h/2, Aks).
```

Forflytninga S er integralet av farten. Av linje 8 og 10 ser vi at dette integralet blir estimert ved ein venstre Riemann-sum. Ved å justere litt på koden kan vi implementere trapesmetoden i staden.

Den enklaste måten å endre koden på kan vere å trekke frå $v(0) \cdot h/2$ og legge til $v(4) \cdot h/2$, der $v(t)$ er fartsfunksjonen, som vi skal integrere.

Dette kan gjerast ved å legge dette til etter linje 11:

```
S = S + h/2*(Fart(N) - Fart(1));
```

b) Vi kan no estimere kor langt vi har flytta oss ved å rekne ut integralet ved anti-derivasjon:

$$S = \int_0^4 v(t)\,dt = \int_0^4 \frac{5t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt$$

Variabelbyte: $u = t^2+4$, $\frac{du}{dt} = 2t$ slik at $dt = \frac{1}{2t}\,du$

$u(0) = 4$ og $u(4) = 4^2 + 4 = 20$

$$S = 5 \int_{u(0)}^{u(4)} \frac{t}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2t}\,du = \frac{5}{2}\int_4^{20} u^{-1/2}\,du =$$

$$\frac{5}{2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-1/2+1}\right]_4^{20} = \frac{5}{2}\left[2\cdot\sqrt{u}\right]_4^{20} =$$

$$5(\sqrt{20} - \sqrt{4}) = 5(2\sqrt{5} - 2) =$$

$$\underline{10(\sqrt{5}-1)} \approx 12.36$$