Prøve-eksamen i DAFE 1000

11/5 2018

Løysingsforslag

Oppg. 1

Formel: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

Her har vi at volumet er

$$V = \pi \int_0^5 \left(\frac{\pi}{2} + \arctan(x-3)\right)^2 dx$$

- Integralet let seg ikkje bestemme ved anti-derivasjon. Så vi må bruke ein numerisk teknikk. Vi kan for eksempel bruke trapesmetoden:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$ med

$$T_n = h\left(\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2} f(x_n)\right)$$

der $h = \frac{b-a}{n}$ og $x_i = a + i \cdot h$.

I MATLAB kan dette implementerast slik:

```
f =@(x) pi*(pi/2+atan(x-3))^2;
a=0; b=5;
N=100;
h=(b-a)/N;
```

```
T = (f(a) + f(b))/2;
for i = 1:(N-1)
    x = a + ih;
    T = T + f(x)*h;
end

T
```

Når skriptet køyrer, vil T_N med $N=100$ bli skriven til skjerm. Det er viktig å køyre skriptet om igjen med høgare N for å kontrollere presisjonen.

Oppg. 2

a) $A\vec{x} = \vec{b}$

Dersom A er invertibel: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

A^{-1} er gitt ved utskrifta frå MATLAB:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0\cdot(-2) + 1\cdot(-1) \\ -2\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 0\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -2-2a & b-2 \end{pmatrix}$$

Uendeleg mange løysingar:

$-2-2a=0$ og $b-2=0 \Leftrightarrow$

$\underline{a=-1 \text{ og } b=2}$

Oppg. 3

$$f(x)=\sqrt{x}-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)-2,\quad D_f=[1,2]$$

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\right)\cdot\dfrac{\pi}{2}-0=$

$\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\pi}{2}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)}$

$\int f(x)\,dx=\int\left(x^{1/2}-\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)-2\right)dx=$

$\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{1/2+1}-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)-2x+C=$

$\underline{\dfrac{2}{3}x^{3/2}-\dfrac{2}{\pi}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)-2x+C.}$

b) For $x\in[1,2]$ er $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ alltid positiv. Så f kan ikkje ha meir enn eitt nullpunkt. Sidan f er kontinuerleg og $f(1)=\sqrt{1}-\cos\frac{\pi}{2}-2=-1<0$ og $f(2)=\sqrt{2}-\cos\pi-2=\sqrt{2}-1>0$, har f

minst eitt nullpunkt ved skjærings-setninga.

Med halveringsmetoden halverer vi intervallet med nullpunktet N gonger - eller N+1 gonger om vi vel midt-punktet til slutt.
Vi skal ha:

$$\frac{2-1}{2^{N+1}} < 10^{-5}$$

$$2^{N+1} > 10^5$$

$$N+1 > \frac{\ln 10^5}{\ln 2} = 5\,\frac{\ln 10}{\ln 2}$$

$$N > 5\,\frac{\ln 10}{\ln 2} - 1 = 15.6096$$

Vi treng <u>16 iterasjonar.</u>

c) Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\sqrt{x_n} - \cos(\frac{\pi}{2}x_n) - 2}{\frac{1}{2\sqrt{x_n}} + \frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x_n)}$$

Med $x_0 = 1$

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{1} - \cos\frac{\pi}{2} - 2}{\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}} = 1.4829$$

$$x_2 = \ldots = 1.5438$$

$$x_3 = \ldots = 1.5462.$$

$x \approx 1.546$, vi ser ut til å ha minst to rette desimalar. (Det èr 5.)

Oppg. 4

$$y' = x + y$$

a) Differensiallikninga er lineær.

$$y' - y = x$$

Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ der $F'(x) = -1$

Vèl $F(x) = -x$

$$e^{-x}(y' - y) = e^{-x}x$$

$$(e^{-x}y)' = e^{-x}x$$

$$e^{-x}y = \int e^{-x}x\,dx$$

Delvis integrasjon: $u = x$, $v' = e^{-x}$ gir

$u' = 1$ og $v = -e^{-x}$ der $\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$:

$$\int e^{-x}x\,dx = x(-e^{-x}) - \int 1 \cdot (-e^{-x})\,dx =$$

$$-xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$e^{-x}y = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$y = e^{+x}(-e^{-x}(x+1) + C) = -(x+1) + Ce^{x}$$

$$= \underline{-x - 1 + Ce^{x}}$$

b) Med startkravet $y(1) = -2$ får vi bestemt C:

$$y(1) = -2$$
$$-1-1+Ce^1 = -2$$
$$Ce^1 = 0$$
$$C = 0$$

Altså: $y(x) = -x-1$.

Dette er en lineær funksjon. Siden Eulers metode baserer seg på lineær tilnærming, vil den gi helt nøyaktig svar her.

Vi kan vise dette eksakt.

Med $y(x) = -x-1$ er

$$y(x+h) = -(x+h)-1 = \underline{-x-1-h}$$

Eulers metode gir

$$y(x+h) = y(x) + (x+y(x))h = -x-1+(x-x-1)h$$
$$= \underline{-x-1-h}$$

Oppg. 5

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

a) $$f'(2) \approx \frac{f(2+h) - f(2-h)}{2h}$$

Med $h = 0.25$:

$$f'(2) \approx \frac{f(2.25) - f(1.75)}{2 \cdot 0.25} = \frac{f(2.25) - f(1.75)}{0.5} =$$

$$2\left(\frac{1}{2.25^2+1} - \frac{1}{1.75^2+1}\right) \approx \underline{-0.1624}$$

Eksakt:

$$f'(x) = \left((x^2+1)^{-1}\right)' = -(x^2+1)^{-2} \cdot (x^2+1)' =$$

$$-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(2) = -\frac{2 \cdot 2}{(2^2+1)^2} = -\frac{4}{25} = \underline{-0.16}$$

Feilen er $|-0.1624 - (-0.16)| = \underline{0.0024}$

I prosent: $$\frac{|-0.1624 - (-0.16)|}{0.16} = 0.0151 = \underline{1.51\%}$$

Oppg. 6

Vi ser at skriptet reknar ut $f(a+h)$ for stadig mindre verdiar av h (linje 7-11). I linje 1 er funksjonen gitt:

$$f(x) = \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}.$$

Verdien for a er gitt i linje 2:

$$a = \frac{\pi}{3}.$$

Altså estimerar vi grenseverdien

$$\underline{\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}} \quad \left(\text{eigentleg } \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \right).$$

Det som blir plotta, er forskjellen på $f(a+h)$ og L. Og denne forskjellen blir veldig liten for h - for h blir så liten at maskinpresisjonen spelar inn. Altså er L grenseverdien over. Denne kan vi bestemme eksakt ved hjelp av L'Hôpitals regel:

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{(\cos x - \frac{1}{2})'}{(x - \frac{\pi}{3})'} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x - 0}{1} = -\sin \frac{\pi}{3} = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$