Oppgåve om tilnærmingsmåtar til differensiallikningar

Løysingsforslag

Startverdiproblem:

$$y'(x) = x - xy, \quad y(0) = 2 \quad .$$

a) Eulers metode:
$y(x_n) \approx y_n$ der

$$y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h \quad \text{og} \quad x_n = x_0 + nh \quad .$$

Her: $F(x, y) = x - xy$, $h = 0.25$, $x_0 = 0$ og $y_0 = 2$, slik at

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + (x_0 - x_0 y_0)h = 2 + (0 - 0 \cdot 2) \cdot 0.25 = 2 \\
y_2 &= y_1 + (x_1 - x_1 y_1)h = 2 + (0.25 - 0.25 \cdot 2) \cdot 0.25 = 1.9375 \\
y_3 &= y_2 + (x_2 - x_2 y_2)h = 1.9375 + (0.5 - 0.5 \cdot 1.9375) \cdot 0.25 = 1.8203 \\
y_4 &= y_3 + (x_3 - x_3 y_3)h = 1.8203 + (0.75 - 0.75 \cdot 1.8203) = 1.6665 \quad .
\end{aligned}$$

I tabellform:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	2	2	1.9375	1.8203	1.6665

b) Vi brukar midtpunktsformelen til å estimere $y'(x_1)$:

$$y'(x_1) \approx \frac{-y(x_0) + y(x_2)}{2h} = \frac{-y_0 + y_2}{2 \cdot 0.25} = 2(-2 + y_2) = -4 + 2y_2 \quad .$$

I følge differensiallikninga skal dette vere lik $x_1 - x_1 y_1 = 0.25(1 - y_1)$;

$$-4 + 2y_2 = 0.25 - 0.25y_1 \Leftrightarrow 0.25y_1 + 2y_2 = 4.25 \quad .$$

For y_2 får vi

$$\frac{-y_1 + y_3}{2 \cdot 0.25} = x_2 - x_2 y_2 \Leftrightarrow -2y_1 + 0.5y_2 + 2y_3 = 0.5 \quad .$$

For y_3 får vi, på heilt tilsvarande måte, at

$$-2y_2 + 0.75y_3 + 2y_4 = 0.75 \quad .$$

Fullt så enkelt er det ikkje for y_4; om i brukar midtpunktsformelen, blandar vi inn y_5 i likninga – og det vil vi ikkje. Det er her den andre, einsidige formelen for numerisk derivasjon kjem inn. Den gir

$$\frac{y_2 - 4y_3 + 3y_4}{2h} = x_4 - x_4 y_4 \Leftrightarrow 2y_2 - 8y_3 + 7y_4 = 1 \quad .$$

Om vi set saman dei fire likningane vi no har kome fram til, får vi likningssystemet i oppgåva.

Om vi brukar MATLAB til å finne løysinga, får vi:

```
>> T=[0.25 2 0 0 4.25; -2 .5 2 0 .5; 0 -2 .75 2 .75; 0 2 -8 7 1];
>> rref(T)
ans =
    1.0000         0         0         0    1.9648
         0    1.0000         0         0    1.8794
         0         0    1.0000         0    1.7449
         0         0         0    1.0000    1.6001
```

I tabellform:

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	2	1.9648	1.8794	1.7449	1.6001

c) For å konstruere Taylor-polynoma opp til og med 4. orden, treng vi til og med den fjerde-deriverte av $y(x)$ for $x = 0$. Desse kan vi finne ved implisitt derivasjon:

$$
\begin{aligned}
y' &= x - xy \\
y'' &= 1 - y - xy' \\
y^{(3)} &= -y' - y' - xy'' = -2y' - xy'' \\
y^{(4)} &= -2y'' - y'' - xy^{(3)}) = -3y'' - xy^{(3)}
\end{aligned}
$$

slik at

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= 0 - 0 \cdot 2 = 0 \\
y''(0) &= 1 - 2 - 0 = -1 \\
y^{(3)}(0) &= -2 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) = 0 \\
y^{(4)}(0) &= -3 \cdot (-1) - 0 = 3 \quad .
\end{aligned}
$$

For Taylor-polynomet av 2. orden får vi altså

$$P_2(x) = y(0) + y'(0)(x-0) + \frac{1}{2}y''(0)(x-0)^2 = 2 - \frac{1}{2}x^2 \quad .$$

Sidan $y^{(3)}(0) = 0$ blir dette også Taylor-polynomet av 3. orden, medan vi får følgande for fjerde orden:

$$P_4(x) = P_2(x) + \frac{1}{3!}y^{(3)}(0)x^3 + \frac{1}{4!}y^{(4)}(0)x^4 = P_2(x) + \frac{1}{8}x^4 \quad .$$

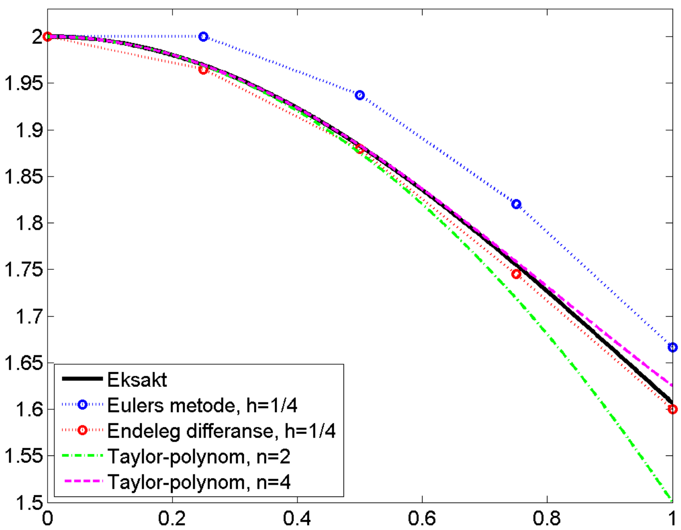
d) Differensiallikninga er både lineær og separabel. Vi vél her å løyse ho ved hjelp av separasjon:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = x(1-y) \\
&\frac{dy}{1-y} = x\,dx \\
&-\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int x\,dx \\
&-\ln|y-1| = \frac{1}{2}x^2 + C' \\
&|y-1| = e^{-x^2/2-C'} \\
&y-1 = \pm e^{-x^2/2-C'} = Ce^{-x^2/2} \quad (C = \pm e^{-C'}) \\
&y = 1 + Ce^{-x^2/2}
\end{aligned}
$$

Startkravet bestemmer C :

$$
\begin{aligned}
&y(0) = 2 \\
&1 + Ce^0 = 2 \\
&C = 1
\end{aligned}
$$

Altså: $y(x) = 1 + e^{-x^2/2}$.



Figuren viser samsvaret mellom den eksakte løysinga og dei ulike tilnærmingane.

Så kan ein jo spørre seg kva av desse metodane som er best. Svaret er enkelt: Om vi kan finne ei eksakt løysing med papir og blyant, er dette det beste; den gir oss eit kompakt uttrykk som alltid er rett. Uttrykket gir oss $y(x)$ for alle mogelege verdiar av x – ikkje berre ein tabell med visse x-verdiar, slik som metodane i a) og b). Men så er det jo også slik at slett ikkje alle differensiallikningar let seg løyse på denne måten.

Når det gjeld Taylor-polynom-metoden, gir dette ei ok tilnærming – så lenge x ligg nær verdien startkravet, x_0. Ikkje uventa gir $P_4(x)$ ei betre tilnærming enn $P_2(x)$. Men her er det vanskeleg å seie noko om kor langt ifrå x_0 verdien av x kan være og samtidig gi ei ok tilnærming til den eksakte løysinga.

Metoden basert på endeleg-differanse-formlar for numerisk derivasjon, den i deloppgåve b), gir som vi ser eit ganske bra estimat. Men denne tilnærminga fungerar berre på lineære differensiallikningar. Eulers metode, derimot, kan ein praktisk tala bruke på kva startverdiproblem som helst. Rettnok gir han eit ganske dårleg estimat her, men med lågare h-verdiar, vil vi få så nøyaktige løysingar vi vil denne metoden. Vi minner også om at det finst fleire liknande metodar som gir veldig gode estimat – sjølv for relativt store verdiar av steglengda h. Eulers midpunktsmetode er eit eksempel på ein slik metode.