Oppgåve om tilnærmingsmåtar til differensiallikningar

Dette startverdiproblemet er gitt:

$$y'(x) = x - xy, \quad y(0) = 2 \quad .$$

Vi skal, på ulike måter, forsøke å estimere løsninga av dette med x i intervallet $[0, 1]$.

a) Bruk Eulers metode med steglengda $h = 0.25$ til å estimere løysinga for punkta x_1, x_2, x_3 og x_4, der $x_n = n \cdot h$.

b) Sidan differensiallikninga er lineær, kan vi også tilnærme løysinga ved å "vri" startverdiproblemet over i eit lineært likningssystem.

Midtpunktsregelen for numerisk derivasjon seier at

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_n + h) - y(x_n - h)}{2h} = \frac{-y(x_{n-1}) + y(x_{n+1})}{2h} \quad .$$

Vidare gjeld også følgande:

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n-2}) - 4y(x_{n-1}) + 3y(x_n)}{2h} \quad .$$

Vi lar framleis h vere 0.25 og x avgrensa til intervallet $[0, 1]$. Vi kan nå komme fram til ei tilnærma løysing av startverdiproblemet ved å løyse dette likningssystemet:

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0.75 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.25 \\ 0.5 \\ 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

der $y_n \approx y(x_n)$.

Forklar korleis vi kan kan bruke derivasjonsformlene over til å komme fram til dette. Løys likningssystemet – gjerne ved hjelp av MATLAB.

c) Finn ei tilnærma løysing ved å konstruere Taylor-polynomet av 4. orden omkring $x = 0$ for løysinga $y(x)$. (*Hint*: Bruk implisitt derivasjon.)

d) I dette tilfellet kan startverdiproblemet relativt greit løysast eksakt med papir og blyant. Gjer dette og plott den eksakte løysinga saman med dei tre tilnærmingane vi fann over.