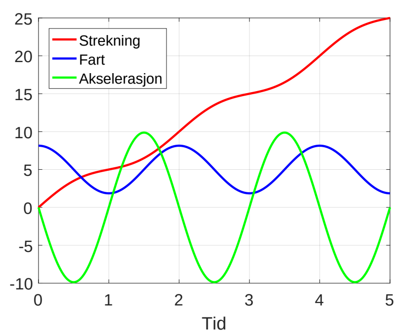
Oppgaver om fart, strekning og akselerasjon

Løsningsforslag

Oppgave 1

$$
\begin{aligned}
s(t) &= 5t + \sin(\pi t) \\
v(t) &= s'(t) = 5 + \cos(\pi t) \cdot (\pi t)' = 5 + \pi \cos(\pi t) \\
a(t) &= v'(t) = \pi(-\sin(\pi t)) \cdot \pi = -\pi^2 \sin(\pi t)
\end{aligned}
$$

Dette kan kanskje fungere som en modell for en rotur? s, v og t er plotta i figur 1.



Figur 1: Plott av funksjonene fra oppgave 1.

Plottet har blitt laget i MATLAB med dette skriptet:

```
% Skript som plotter strekning (s), fart (v) og
% akselerasjon(a) for gitte modeller.

t=0:1e-2:5;                     % Vektor med tidspunkt
s=5*t+sin(pi*t);                % Strekning
v=5+pi*cos(pi*t);               % Fart
a=-pi^2*sin(pi*t);              % Akselerasjon

% Plotter
plot(t,s,'r-','linewidth',2)
hold on
plot(t,v,'b-','linewidth',2)
plot(t,a,'g-','linewidth',2)
hold off
```

```
grid on                          % Setter på et rutenett
set(gca,'fontsize',15)           % Større skrift
xlabel('Tid')                    % Tekst på x-aksen
% Tekstboks som forklarer grafene
legend('Strekning','Fart','Akselerasjon','location','northwest')
```

Oppgave 2

$$\begin{aligned} v(t) &= 50\left(1-e^{-t/5}\right) \\ a(t) &= v'(t) = 50\cdot\left(0-e^{-t/5}\cdot(-t/5)'\right) = 10e^{-t/5} \end{aligned}$$

Siden vi skal ha at $s'(t)=v(t)$, må s vere en anti-derivert til v:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = 50\int\left(1-e^{-t/5}\right)\,dt = 50\left(t-\frac{1}{-1/5}e^{-t/5}\right)+\mathcal{C} =$$
$$50t+250e^{-t/5}+\mathcal{C}$$

Integrasjonskonstanten $\mathcal{C}$ kan bestemmes ved startkravet $s(0)=0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 50\cdot 0+250e^{0}+\mathcal{C} \\ \mathcal{C} &= -250 \end{aligned}$$

slik at

$$s(t) = 50t+250e^{-t/5}-250 = 50t-250\left(1-e^{-t/5}\right) \quad .$$

Dette eksempelet er en ok modell for en fallende gjenstand med luftmotstand. (Her er positiv retning nedover.) Siden s, v og a får ganske ulike tall-verdier, har det mest for seg å plotte dem hver for seg. Plottene ser du i figur 2.

Oppgave 3

$$a(t) = a \quad \text{– akselerasjonen er konstant.}$$

Dette eksempelet har mange av oss alt sett i fysikken.

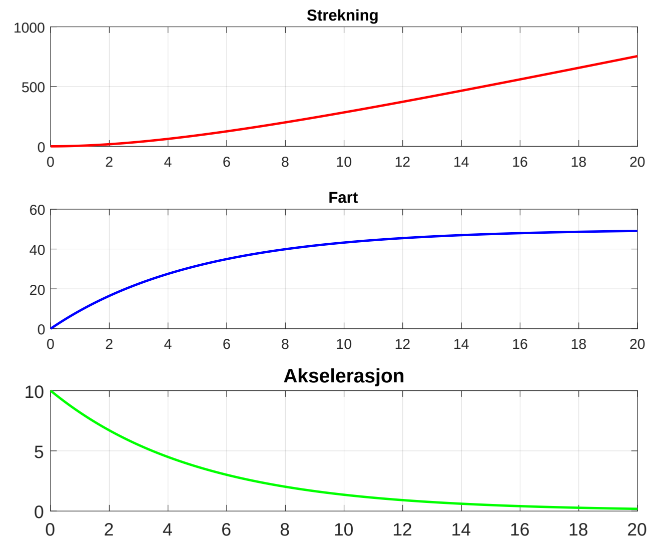
$$v(t) = \int a\,dt = at+\mathcal{C} \quad .$$

Her er det mer naturlig å kalle integrasjonskonstanten "v_0":

$$v(t) = v_0+at \quad .$$

For strekninga:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int (v_0+at)\,dt = v_0t+a\int t\,dt = v_0t+\frac{1}{2}at^2+\mathcal{C} \quad .$$

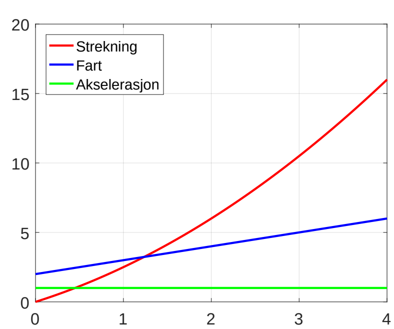


Figur 2: Plott av funksjonene fra oppgave 2. Her ser vi at strekninga $s(t)$ går mer og mer mot ei rett linje, farten $v(t)$ ser ut til å stabilisere seg på omtrent 50 og akselerasjonen $a(t)$ går mot null. Her har altså både v og a horisontale asymptoter.

Her kunne vi godt ha kalt integrasjonskonstanten for "s_0" i stedet for $\mathcal{C}$. Men siden $s(0) = 0$, blir uansett konstanten 0:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad .$$

Om vi velger $a = 1$ og $v_0 = 2$, får plottet vist i figur 3



Figur 3: Plott av funksjonene fra oppgave 3. a er konstant, v er ei rett linje og s er en parabel.

Oppgave 4

I læreboka er et liknende eksempel brukt om en gjenstand som først blir holdt fast, så sluppet og til slutt treffer den golvet eller bakken:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ -10(t-4), & 4 \leq t < 6 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases} \quad .$$

Her er positiv retning oppover.

Som før finner vi akselerasjonen ved å derivere. Men nå har vi ikke noen forutsetning for å si at den deriverte er veldefinert for $t = 4$ og $t = 6$. Tvert imot, siden v ikke er kontinuerleg for $t = 6$, kan heller ikke $v'(t) = a(t)$ vere definert for $t = 6$. (Den deriverte er heller ikke definert for $t = 4$.)

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ -10, & 4 < t < 6 \\ 0, & t > 6 \end{cases} \quad .$$

Som før finner vi strekninga – altså hvor langt gjenstanden har falt fra nullnivået – ved å integrere. For $t < 4$ er $v(t) = s'(t) = 0$, slik at s må være en konstant, $s = \mathcal{C}_1$ for $t < 0$. Det same gjelder for $t > 6$: $s(t) = \mathcal{C}_3$.

Selvsagt trenger ikke konstantane være like; det har vi markert ved å kalle dem "$\mathcal{C}_1$" og "$\mathcal{C}_3$". For $t \in (4, 6)$:

$$s(t) = \int -10(t-4)\,dt = -5t^2 + 40t + \mathcal{C}_2 \quad .$$

Altså:

$$s(t) = \begin{cases} \mathcal{C}_1, & t < 4 \\ -5t^2 + 40t + \mathcal{C}_2, & 4 \leq t < 6 \\ \mathcal{C}_3, & t \geq 6 \end{cases} \quad .$$

Så hvordan bestemmer vi $\mathcal{C}$-ene? Vel, den første bestemmer vi ved startkravet:

$$s(0) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{C}_1 = 0 \quad .$$

Her *må* resultatet bli kontinuerleg, må det ikke? Siden s skal vere kontinuerleg, også for $t = 4$, må vi kreve at

$$\lim_{t \to 4^-} s(t) = \lim_{t \to 4^+} s(t) = s(4) \quad .$$

Dermed må vi kreve at

$$0 = -5 \cdot 4^2 + 40 \cdot 4 + \mathcal{C}_2 \;\Leftrightarrow\; \mathcal{C}_2 = -80 \quad .$$

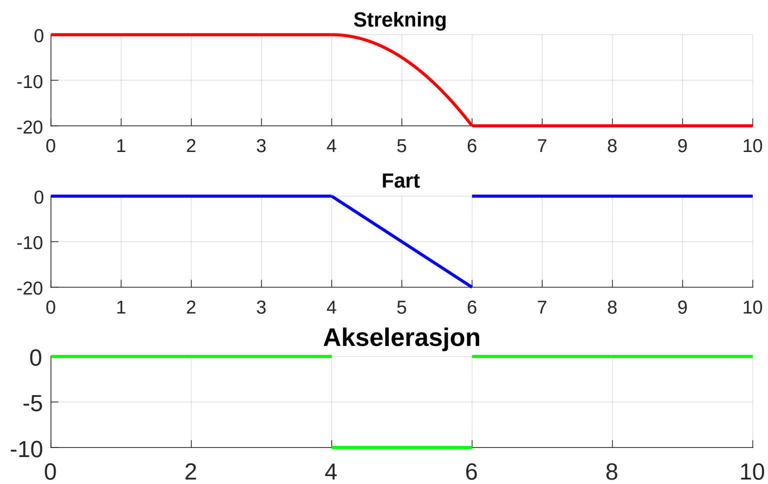
På samme måte gir kravet til kontinuitet i $t = 6$ at

$$-5 \cdot 6^2 + 40 \cdot 6 - 80 = \mathcal{C}_3 \;\Leftrightarrow \mathcal{C}_3 = -20 \quad .$$

Vi får

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 4 \\ -5t^2 + 30t - 80, & 4 \leq t < 6 \\ -20, & t \geq 6 \end{cases} .$$

Funksjonene er plotta i figur 4



Figur 4: Plott av funksjonene fra oppgave 4. En gjenstand blir sluppet ved $t = 4$ slik at den plutseleg får ein akselerasjon nedover. Dermed øker farten og strekninga på samme måte som i oppgave 3 helt til gjenstanden treffer bakken ved $t = 6$.