DAFE1000 2/3 -18

(1) Info/beskjedar

- Mange har enda ikkje henta innlev. 2.
- Innlev. 3 lagt ut.
- Oppmøte på rekneøving

(2) Sist: Newtons metode

- Når den virkar, når x_n konvergerar mot ei rett løysing, gjer den ofte det styggfort.
- Ikkje „idiotsikker"

Kvifor konvergerar den så fort?

→ S. 10 i notat frå 26/2.

Vise patologi: $xe^{-x^2}=0$ for $x_0 \approx 0.5$
(Oppg. 5.4.10)

(3) Nokre eksempel med derivasjon av elementære funksjoner:

Juni -12: 1a), aug.-12: 1b)

Juni 12:

$f(x) = \ln x + \sin(2x)$

$f'(x) = \frac{1}{x} + \cos(2x) \cdot (2x)' = \frac{1}{x} + 2\cos(2x)$

- Vise formelark

$g(x) = e^{3x}\sqrt{1+x^2}$

$g'(x) = (e^{3x})'\sqrt{1+x^2} + e^{3x}(\sqrt{1+x^2})' =$

$3e^{3x}\sqrt{1+x^2} + e^{3x}\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' =$

$e^{3x}\left(3\sqrt{1+x^2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}}\right) =$

$e^{3x}\sqrt{1+x^2}\,(3(1+x^2)+x) =$

$\underline{e^{3x}\sqrt{1+x^2}\,(3x^2+x+3)}$

Aug. 12:

$f(x) = x^2 \cos x^2$

$f'(x) = (x^2)'\cos x^2 + x^2 \cdot (\cos x^2)' =$

$2x\cos x^2 + x^2 \cdot (-\sin x^2) \cdot (x^2)' =$

$2x\cos x^2 - x^2 \sin x^2 \cdot 2x =$

$2x\cos x^2 - 2x^3 \sin x^2 =$

$\underline{2x(\cos x^2 - x^2 \sin x^2)}$

$g(x) = \ln x^2 + (\ln x)^2 = 2\ln x + (\ln x)^2$

$g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x \cdot (\ln x)' =$

$\frac{2}{x} + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\frac{2}{x}(1 + \ln x)}$

④ Eksempel

Kva er den største verdien denne funksjonen kan ha?:

$$f(x) = e^{-x^2}\ln x \ , \ D_f = \langle 0, \infty \rangle$$

$x \to 0^+ \Rightarrow f \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x e^{x^2}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2 e^{x^2}} = 0$

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' \ln x + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x} =$

$e^{-x^2}\left(-2x\ln x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} e^{-x^2}(1 - 2x^2\ln x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ 1 - 2x^2\ln x = 0$

$x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \Rightarrow 1 - 2x^2\ln x > 0$

$(1 - 2x^2\ln x)' = -4x\ln x - 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = -2x(2\ln x + 1)$

Ser: $(1 - 2x^2\ln x)' < 0$ når $x > 1$

– Maksimalt eitt nullpunkt for $f'(x)$

Korleis finn vi nullpunktet?

→ Newtons metode, til dømes.

→ „Implementerar" på kalkulator

$g(x) = 0$ med $g(x) = 1 - 2x^2 \ln x$

$g'(x) = -4x \ln x - 2x^2 \frac{1}{x} = -4x \ln x - 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - 2x_n^2 \ln x_n}{-4x_n \ln x_n - 2x_n}$$

– Vel $x_0 = 1$

Får $x = 1.327864$ (4 iterasjonar)

Maksimalverdi:

$f(1.327864) = \underline{0.04863}$

5 Uoppstilte optimeringsproblem

Eksempel: Mai 14:7 (jmf. 5.8.25)

Pris per kvadratmeter for golv og vegger: k

For tak: 3k.

Volum (i m^3): $V = 6.75$

$s^2 \cdot h = 6.75$, $h = \frac{6.75}{s^2}$

Pris for golv: $s^2 \cdot k$

— " — vegger: $s \cdot h \cdot k \cdot 4$

— " — tak: $s^2 \cdot 3k$

Totalt: $s^2 \cdot k + 4shk + 3s^2k =$

$k(s^2 + 4sh + 3s^2) = 4k(s^2 + sh)$

Ser: Prisen er lågast når $s^2 + sh$ er lågast.

For volum: $h = \frac{6.75}{s^2}$

Skal minimere

$f(s) = s^2 + sh = s^2 + s \cdot \frac{6.75}{s^2} = s^2 + \frac{6.75}{s} \quad (s > 0)$

$f'(s) = (s^2 + 6.75\, s^{-1})' = 2s - 6.75 \cdot s^{-2}$,

$f'(s) = 0 \iff 2s - \frac{6.75}{s^2} = 0$

$2s^3 = 6.75$

$s^3 = \frac{6.75}{2} = 3.375$

$s = \sqrt[3]{3.375} = \underline{1.5}$

$h = \underline{4.5}$

Altså: Veggen bør vere 1.5 m lang og 4.5 m høg

Eksempel

Vi tenker oss at luftmotstanden gir ein fallskjermhoppar ein negativ akselerasjon som er proporsional med farten. Tyngdeakselerasjonen er 10 - målt i m/s^2. Opp toppfarten er 55 m/s, kva er proporsionalitets-konstanten?

Fart: $v(t)$

Akselerasjon: $a(t) = v'(t)$

Tyngdeakselerasjon: $g = 10$

Luftmotstand: $-kv$

Altså: $a = g - kv$

$$v'(t) = g - kv(t)$$

Poeng: Når v er maksimal, kva er $a = v'$?

$$\underline{v' = 0}$$

$$0 = g - k \cdot v_{max}$$

$$k = \frac{g}{v_{max}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11} = \underline{0.1818}$$

(6) Leibniz-notasjon

Alternativ til apostrof: $\frac{d}{dx}$

Altså: $f'(x) = \frac{df}{dx}$

← Kan tenkje på det som $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ når Δx (og Δf) $\to 0$.

dx: „Uendeleg liten" men ikkje null.

- Kan også bruke $\frac{d}{dx}$ som ein operator:

„$\frac{d}{dx}(\cos x + x^2)$" betyr det same som „$(\cos x + x^2)'$"

Fordelar: - Tydelegare.

- Spesifiserar kva vi deriverar med omsyn [hensyn] på.

Kjerneregelen: Hvis $f(x) = \sin x^2$, er

$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x)$ der $g(u) = \sin u$ og $u(x) = x^2$

Enklare: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ med $u = x^2$, $f(x) = \sin u$

$\frac{df}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dx} = 2x$ slik at $\frac{df}{dx} = \cos u \cdot 2x = \underline{2x \cos x^2}$

⑦ Kopla fart

Generelt:

- Problem der y er avhengig av x, og begge er avhengige av tid.

Eksempel

a) Ein politibetjent står 15 m frå ein rett veg. Ein bil i avstanden 50 m frå henne blir målt til farten 19,5 m/s – i forhold til betjenten. Kor fort køyrer bilen?

b) Ein annan bil køyrer jamt i 25 m/s. Kva fart måler betjenten i det bilen er 100 m unna? Og på det næraste?

Pytagoras: $y^2 = d^2 + x^2$, $y = \sqrt{d^2+x^2}$

Begge funksjonane er avhengige av tida

Farten til bilen: $x'(t)$

Målt fart: $y'(t) = 19.5$ når $y = 50$

Kjerneregelen:

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{d^2+x^2}} \cdot (d^2+x^2)' \cdot x'(t)$$

$$y'(t) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{d^2+x^2}} \cdot x'(t)$$

$$x'(t) = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{x} \cdot y'(t)$$

$\sqrt{d^2+x^2} = y$ og $x = \sqrt{y^2-d^2}$

$$x'(t) = \frac{y}{\sqrt{y^2-d^2}} \cdot y'(t)$$

Med våre tal:

$$x'(t) = \frac{50}{\sqrt{50^2-15^2}} \cdot 19.5 = 20.44$$

Bilen har farten <u>20.44 m/s</u> (73.6 km/h).

Enklare: Deriverar „rett på" likninga:

$$y^2 = d^2 + x^2$$

$$\frac{d}{dt} y^2 = \frac{d}{dt}(d^2 + x^2)$$

$$2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0 + 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$y\, y'(t) = x\, x'(t)$$ – Implisitt derivasjon

$$x'(t) = \frac{y}{x} y'(t) = \frac{y}{\sqrt{y^2-d^2}} y'(t)$$

b) $$y'(t) = \frac{x}{y} x'(t) = \frac{\sqrt{y^2-d^2}}{y} \cdot x'(t)$$

Med $y=100$:

$$y'(t) = \frac{\sqrt{100^2-15^2}}{100} \cdot 25 = \underline{24.72}$$ (nesten likt)

Når bilen er nærmest: $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} x'(t) = 0 \cdot x'(t) = 0$$

Eksplisitt:

$y = \sqrt{d^2+x^2}$ er minimalt $d=15$ $(x=0)$:

$$y'(t) = \frac{\sqrt{d^2-d^2}}{d} \cdot x'(t) = \underline{0}$$