DAFE1000 26/2-18

① Beskjedar/info?

② Om innleveringa: Mykje bra!

Eit par ting er verd å presisere.

Ikkje OK:

- Begynne med $n \geq \left\lceil \frac{\ln \frac{b-a}{p}}{\ln 2} - 1 \right\rceil$

for å bestemme talet på iterasjonar (1 b)).

- Om desimalar og presisjon.

Mange: Pres = 1e-5

>> x = 1.1142 (Skrivefeil i LF, forresten)

[?] Kva er problemet?

→ Bør ha 5 desimalar,

"x = 1.1142" betyr her eigentleg at

$x \in [1.11415, 1.11425\rangle$

-Skulle si at løysinga faktisk har en feil mindre enn 10^{-5}.

Kan finne $x = \dfrac{\ln(5+2\sqrt{6})}{\ln 2} \approx 3.3073$

[?] Kva er svaret?

Kva skal vi samanlikne den numeriske løysinga med?

$\rightarrow \dfrac{\ln(5+2\sqrt{6})}{\ln 2}$, ikkje det avrunda desimaltalet

MATLAB:

```
>> Fasit = log(5+2*sqrt(6))/log(2);
>> Feil = abs(Fasit - x),
```

feil = 5.94... e-6

4b) Forskjellen på numeriske, tilnærma løysingar og eksakte løysingar blir tydeleg her.

MATLAB: x = 2.55715

f(x) = 2.55715

-Dette viser ikkje at x og f(x) er like – i absolutt forstand.

Der kan vere ein skilnad i 6. desimal.
- Her må vi til med papir og blyant.

③ Om numerisk derivasjon (oppg. 3)

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{1}{2}K_1 h$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6}K_2 h^2$$

Feil: $\sim \frac{1}{2}K_1 h^1$ vs. $\frac{1}{6}K_2 h^2$ for dei to metodane

$K_1 = f''(c)$, $c \in [a, a+h]$,

$K_2 = f'''(c)$, $c \in [a-h, a+h]$

- Plott - med plott av h og h^2 òg.

Merk: Dersom $f''' = 0$ - alltid, er $K_2 = 0$. Dermed er midtpunkt-formelen eksakt - uansett kva h-verdi vi har.

$\boxed{?}$ Kan det stemme då?

$\boxed{?}$ Kva funksjonar er alltid 0 etter tre derivasjonar?

→ 2.-grads polynom.

Eksempel

For $p(x) = x^2 + 2x - 3$, vis at

$$\frac{p(x+h) - p(x-h)}{2h} = p'(x) \quad - \quad \text{for alle } h.$$

$p'(x) = 2x + 2$

$$\frac{p(x+h) - p(x-h)}{2h} =$$

$$\frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - 3 - ((x-h)^2 + 2(x-h) - 3)}{2h} =$$

$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - 3 - (x^2 - 2xh + h^2 + 2x - 2h - 3)}{2h} =$$

$$\frac{\cancel{x^2} + 2xh + \cancel{h^2} + \cancel{2x} + 2h - \cancel{3} - \cancel{x^2} + 2xh - \cancel{h^2} - \cancel{2x} + 2h + \cancel{3}}{2h} =$$

$$\frac{4xh + 4h}{2h} = \frac{2h(2x+2)}{2h} = 2x + 2 = p'(x) \qquad \square$$

Poeng: Midtpunktformelen for numerisk derivasjon er <u>eksakt</u> for andregrads-polynom.

④ Newtons metode

Eksempel s. 10-12 i notat frå 16/2.

- Vise demo: NewtonMedPlott.m

Newtons metode:

1) Skriv likninga som $f(x)=0$, f må vere deriverbar (i det aktuelle området).

2) Velg deg ein x_0 som ligg i nærleiken av nullpunktet. Lag gjerne eit plott for å velge x_0.

3) Iterér på $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ til $x_{n+1} \approx x_n$

Eksempel

a) Bestem alle løysingar av denne likninga med ein feil som er mindre enn 10^{-6}:

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2}x + 2.$$

b) Kor mange iterasjonar måtte vi ha gjort med halveringsmetoden med utgangspunkt i intervallet $[0, 2]$?

c) Likninga kan løysast eksakt. Kontroller at feilen faktisk er mindre enn 10^{-6} ved å samanlikne med eksakt løysing.

a) – Gjer det først med for-løkke og utskrift på kvar iterasjon, „pause".
– Så: while-implementering.

NB: Dette er veldig likt det vi gjorde med fikspunkt-iterasjon ($x_{n+1} = g(x_n)$ for likninga $x = g(x)$).

b) n halveringar av intervallet $[a, b]$:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \cdot (b-a) = \frac{b-a}{2^n} = \frac{2}{2^n}$$

Midtpunktet til slutt; ny halvering: $\frac{b-a}{2^{n+1}}$

$$= \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

Skal ha: $\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$, $2^n > 10^6$,

$$n \geq \left\lceil \frac{\ln 10^6}{\ln 2} \right\rceil = \lceil 19.93 \rceil = \underline{20}$$

c) $\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{2}+2$

$\Rightarrow x^2+1 = (\frac{x}{2}+2)^2 = \frac{1}{4}x^2+2x+4$

$\frac{3}{4}x^2-2x-3=0$

$3x^2-8x-12=0$

$x = \frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-12)}}{2\cdot 3} = \frac{8\pm\sqrt{208}}{6} =$

$\frac{8\pm 4\sqrt{13}}{6} = \frac{4\pm 2\sqrt{13}}{3}$

- For ordens skuld: Bør sjekke at vi ikkje drar med oss falske løysingar.

Sjekkar feil i MATLAB

```
>> Feil = abs((4+2*sqrt(13)/3 - x)
```

$\rightarrow$ 4.44... e-16

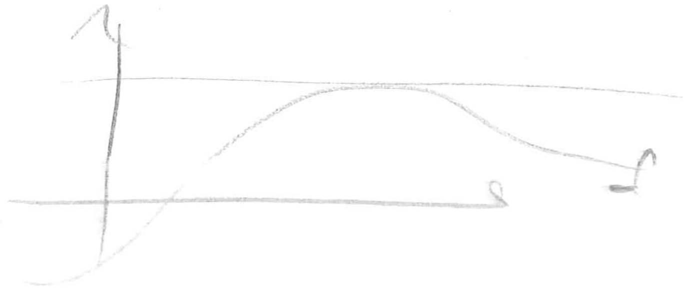
- Vi har faktisk maskinpresisjon.

f(x) ligg veldig nær ei linje for mange x-verdiar, så det er kansje ikkje så rart. Men morallen står seg:

Newtons metode gir rett svar veldig raskt; når den fungerer, treng vi få iterasjonar.

5 Patologiar – ting som kan gå galt

Opplagt problem: Dersom $f'(x_n) = 0$



Tangenten skjer aldri x-aksen; den lineære tilnærminga har ingen nullpunkt

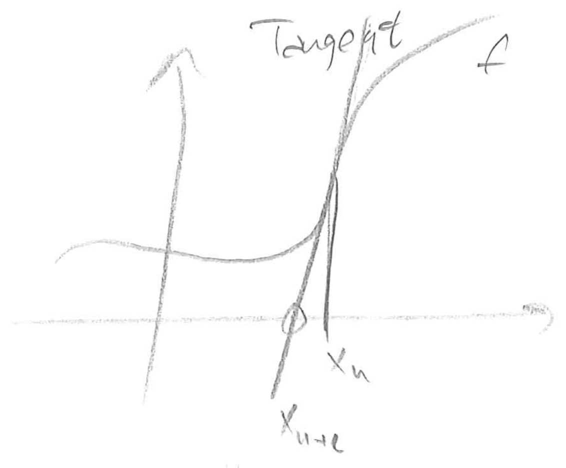
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_{n+1})} \leftarrow \text{Går galt om denne er 0.}$$

Dersom $f'(x_n) \approx 0$:

x_{n+1} ligg lenger borte frå nullpunktet enn x_n.

- Kanskje får metoden henta seg inn igjen, kanskje vil x_n nærme seg eit anna nullpunkt, kanskje vil ikkje x_n nærme seg noko spesielt i det heile.

Dersom $f'(x_n)$ er veldig stor



$x_n \approx x_{n+1}$ – sjølv om vi ikkje er i nærleiken av ei løysing/eit nullpunkt.

Kan også skje at x_n slett ikkje nærmar seg noko.

Eksempel

Forsøk å sjå kva som skjer når vi prøver å løyse likninga
$x^4 - 4x - 5 = 0$
med Newtons metode med $x_0 = 1$.

→ Matlab, "utskrift" og "pause".

Moral: Newtons metode er ikkje „idiot-sikker".

Halveringsmetoden er derimot sikker dersom f er kont. på $[a,b]$ og $f(a)\cdot f(b)<0$.

x_n nærmar seg løysinga mykje for kvar iterasjon

⑥ Hvis tid:

Kvifor konvergerar Newtons metode så fort?

Hvis α er den eksakte løysinga; $f(\alpha)=0$, og x_{n+1} nærmar seg x_n:

$x_n=\alpha+\varepsilon_n$, $x_{n+1}=\alpha+\varepsilon_{n+1}$, ε er feilen

$$\varepsilon_{n+1}=x_{n+1}-\alpha=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\alpha=\varepsilon_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Lineær tilnærming:

$$0=f(\alpha)=f(x_n-\varepsilon_n)=f(x_n)+f'(x_n)(x_n-\varepsilon_n-x_n)+\tfrac{1}{2}K(x_n-\varepsilon_n-x_n)^2$$
$$=f(x_n)-f'(x_n)\varepsilon_n+\tfrac{1}{2}K\varepsilon_n^2 \iff$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\varepsilon_n-\frac{K}{2f'(x_n)}\varepsilon_n^2$$

Dermed:

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n-\left(\varepsilon_n-\frac{K}{2f'(x_n)}\right)=\frac{K}{2f'(x_n)}\varepsilon^2$$

Feilen avtar kvadratisk