DAFE1000 16/2

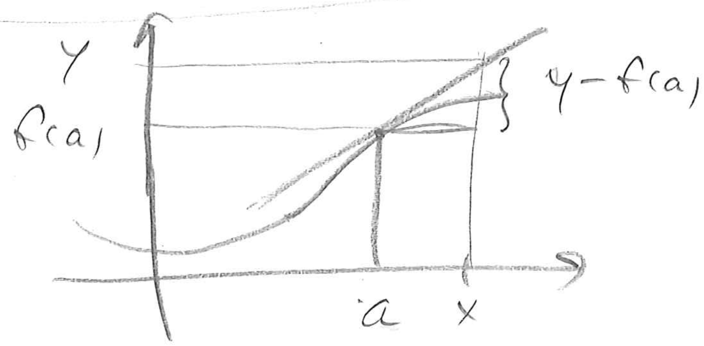
(1) - Justering av timeplanen

- Innlev. 3 lagt ut. Frist: 23/3
- Innlev. 2 delt ut att i dag?
- Neste veke: Rekneøving?

(2) Repetere linearisering:

Dersom f er deriverbar for $x=a$ og $x \approx a$, er

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$



$$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

Eksempel s. 9 i notat frå 12/2.

③ [?] Kvis h er liten, kva er minst av h og h^2?

Jmf. 0.1 og 0.1^2

Mål med mange numeriske metodar:
Feilen skal vere proporsjonal med h^n der n er størst mogleg

Med

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

legg merke til at $p_1(a) = f(a)$ og at $p_1'(a) = f'(a)$.

– Kvifor ikkje fortsette – å konstruere eit andregradspolynom $p_2(x)$ som er slik at $p_2''(a) = f''(a)$ – o.s.b.?

Vi får då det vi kallar eit Taylor-polynom.

$p_1(x)$ er Taylor-polynomet av grad 1 for $f(x)$ omkring $x = a$.

Taylor (1685–1731) kom fram til ein formel som avgrensar feilen – altså forskjellen mellom funksjonen og Taylor-polynomet.

For 1. orden:

Dersom $f(x)$ er to gonger deriverbar for $x=a$, gjeld

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}K \cdot (x-a)^2$$

der $K = f''(c)$ for ein c mellom x og a.

Eksempel

Dersom $f(a) = g(a) = 0$ og f og g kan deriverast (minst) to gonger for $x=a$, gjeld at

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \quad (g'(a) \neq 0).$$

a) Kvifor?

b) Bruk dette til å bestemme desse grensene:

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Veit: $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} K_1 (x-a)^2$

$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2} K_2 (x-a)^2$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{f(a)} + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}K_1(x-a)^2}{\underbrace{\cancel{g(a)}}_{0} + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}K_2(x-a)^2}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}K_1(x-a)^2) : (x-a)}{(g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}K_2(x-a)^2) : (x-a)} =$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(a) + \frac{1}{2}K_1(x-a)}{g'(a) + \frac{1}{2}K_2(x-a)} \overset{g'(a) \neq 0}{=} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

b) i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2+x-6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2-4)'}{(x^2+x-6)'} =$ („$\frac{0}{0}$")

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x-0}{2x+1-0} = \dfrac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 1} = \underline{\dfrac{4}{5}}$

ii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'}$ („$\frac{0}{0}$")

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos 0 = \underline{1}$

iii) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$ („$\frac{0}{0}$")

$\lim_{x \to 0} \frac{0-(-\sin x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

- Kunne ha brukt regelen med derivasjon to gonger.

5

Denne regelen heiter... [?] l'Hôpitals regel:

Dersom $f(x)$ og $g(x)$ er deriverbare og $g'(x) \neq 0$ for x i eit område omkring a og $\frac{f(x)}{g(x)}$ er eit „$\frac{0}{0}$"- eller eit „$\frac{\infty}{\infty}$"- uttrykk, er

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

så lenge grenseverdien er veldefinert eller uttrykket går mot $\pm\infty$.

Merk: „$\frac{\infty}{\infty}$" følger av „$\frac{0}{0}$"; dersom $\frac{f(x)}{g(x)}$ er eit „$\frac{\infty}{\infty}$"- uttrykk, er $\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ eit „$\frac{0}{0}$"- uttrykk.

- Regelen gjeld også når $x \to \pm\infty$.
- Vi kan bruke han fleire gonger.

Eksempel

Bestem desse grenseverdiane

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

---

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\left(\text{„} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \right)$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} =$

$- \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{1} = \underline{0}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} =$ $\left(\text{„} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \right)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{n(n-1) e^{n-2}}{e^x} = \right.$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = \underline{0}$ for endeleg n.)

c) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} =$ $\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{"} \right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x - x)'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$ $\left(\text{„}\frac{0}{0}\text{"} \right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x - 0}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} =$

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{-\sin 0}{2 \cdot \cos 0 - 0 \cdot \sin 0} = \underline{\underline{0}}$

⑥ Numerisk derivasjon – revisited

Eksempel

a) Dersom $f(x)$ er to gonger deriverbar for $x = a$, kor stor feil gjer vi når vi seier at $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ med h liten?

b) For kva type funksjonar er „framoverformelen" for numerisk derivasjon heilt nøyaktig?

c) For midtpunktsformelen gjeld

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{1}{6} K_2 h^2 \text{ der}$$

$K_2 = f'''(c)$ for ein $c \in [a-h, a+h]$.

Kvifor er midtpunktsformelen betre?

d) For kva type funksjonar er midtpunktsformelen eksakt?
 - Velg deg èin slik funksjon og vis at dette stemer ved utrekning.

①

a) Veit at $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}k_1(x-a)^2$
Med $x = a+h$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)(a+h-a) + \frac{1}{2}K_1(a+h-a)^2$$
$$= f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}K_1h^2$$

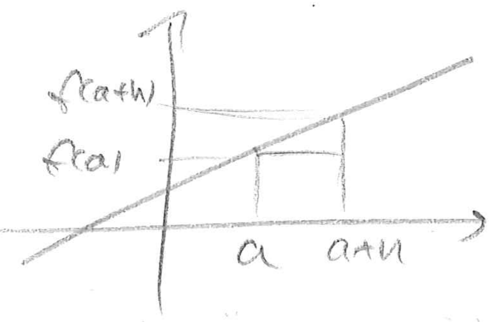
$$f'(a)h = f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2}K_1h^2$$
$$f'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{1}{2}K_1h$$

Feil er $-\frac{1}{2}K_1h$ der $K_1 = f''(c)$ for ein $c \in [a, a+h]$.

b) Dersom $f''(x)$ alltid er 0, er feilen 0.

$f''(x)=0$ – for lineære funksjonar,

$f(x)=ax+b$



$$f'(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

– uansett kva h er.

c) Feil med framoverformel er $\frac{1}{2}K_1 h$, $\frac{1}{6}K_2 h^2$ med midtpunktsformelen. For liten h, er h^2 mykje mindre enn h – dermed er også feilen mykje mindre (sjølv om K_2 kan vere større).

d) $K_2 = f'''(c)$.

Dersom $f'''(x)=0$ – alltid: f er eit andregradspolynom, $f(x)=ax^2+bx+c$

– Tester med

$f(x)=x^2-2x+3$

$f'(x)=2x-2$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{(x+h)^2-2\cdot(x+h)+3-((x-h)^2-2(x-h)+3)}{2h}$$

$$\frac{x^2+2hx+h^2-2x-2h+3-(x^2-2hx+h^2-2x+2h+3)}{2h} =$$

$$\frac{x^2+2hx+h^2-2x-2h+3-x^2+2hx-h^2+2x-2h-3}{2h} =$$

$$\frac{4hx-4h}{2h} = \frac{2h(2x-2)}{2h} = \underline{2x-2 = f'(x)}$$

$\square$

- Poeng:

Feilen med framoverformelen går som $k_1 h$, mens feilen med midtpunktsformelen går som $k_2 h^2$ – og er dermed mykje meir nøyaktig (og eksakt for andregradspolynom).

7 Eksempel

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = e^{x/2} + x - 5$$

a) Finn likninga for tangenten til f for $x = 3$ og plott denne saman med f. Ligg nullpunktet til denne nær nullpunktet til f?

b) Enn med $x=2$?

c) Om vi går tilbake til $x=3$ og brukar nullpunktet till tangenten som utgangspunktet for å lage ein ny tangent, har denne nullpunkt nær $f(x)$ sitt?

---

a) Likning: $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ med

$f(x) = e^{x/2} + x - 5$ og $a = 3$

$f(3) = e^{3/2} + 3 - 5 = e^{3/2} - 2$

$f'(x) = e^{x/2} \cdot \frac{1}{2} + 1 - 0 = \frac{1}{2} e^{x/2} + 1$

$f'(3) = \frac{1}{2} e^{3/2} + 1$

$y = e^{3/2} - 2 + \left(\frac{1}{2} e^{3/2} + 1\right)(x-3)$

→ Plottar i MATLAB

Nullpunkt:

$f(3) + f'(3)(x-3) = 0$

$f'(3)(x-3) = -f(3)$

$x - 3 = -\dfrac{f(3)}{f'(3)}$

$$x = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{e^{3/2}-2}{\frac{1}{2}e^{3/2}+1} = 2.234$$

b) Med $x=2$.

Tangent:

$$y = f(2) + f'(2)(x-2)$$
$$= e - 3 + \left(\tfrac{1}{2}e+1\right)(x-2) \quad \to \text{plotter}$$

Nullpunkt:

$$x = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2.1194$$

Plott: Veldig <u>nær</u>!

c) Ny linearisering:

$$y = f(2.234) + f'(2.234)(x-2.234)$$

Nullpunkt:

$$x = 2.234 - \frac{f(2.234)}{f'(2.234)} = 2.119$$

Og hvorfor slutte der?