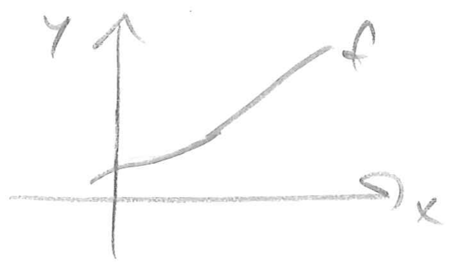
# DAFE 1000 12/2

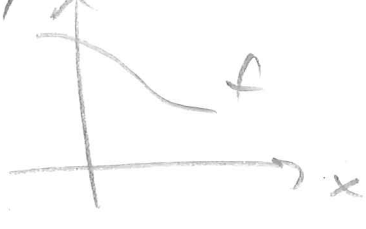
① – Innlevering på fredag
– Utsett innlev. 3 ei veke (blir lagt ut snart)

② Monotoni og ekstremalpunkt

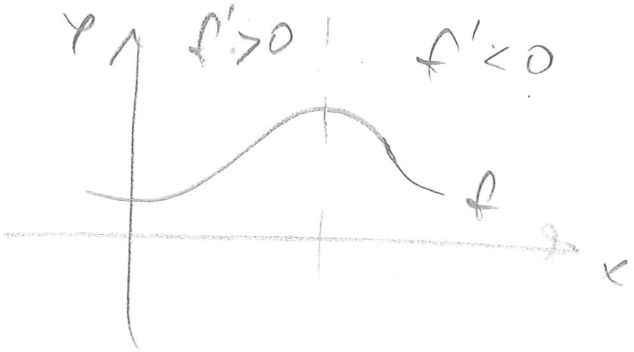
Dersom $f'(x) > 0$, vil ein liten auke i x gi ein liten auke i f òg. Grafen går oppover




Motsett: Dersom $f'(x) < 0$, vil ein liten auke i x gjere at f minkar

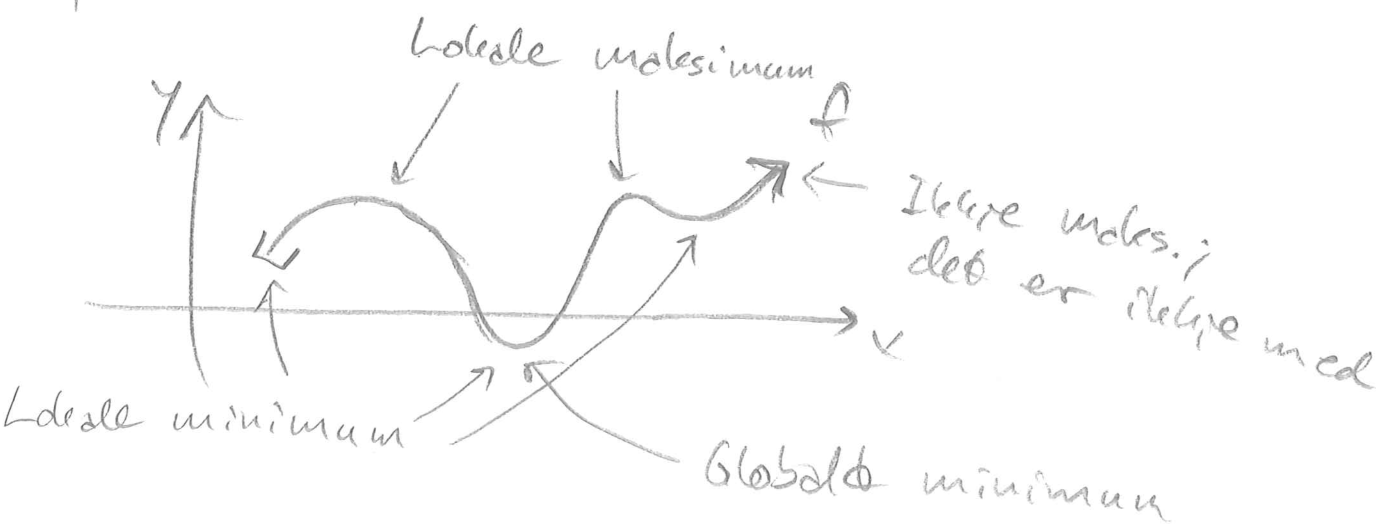


Der f' byter frå å vere positiv til å vere negativ, vil grafen byte frå å gå oppover til å gå nedover; der vil vere ein topp.




Motsett: Der f' går frå å vere negativ til å vere positiv, har vi ein botn – eit lokalt minimum.

Merk: Endar, randpunkt, kan også vere toppar og botnar – ekstremalpunkt.



Eksempel (5.8.11 i læreboka)

For funksjonen $f(x) = x - 3x^{2/3}$, $D_f = [-1, 30\rangle$

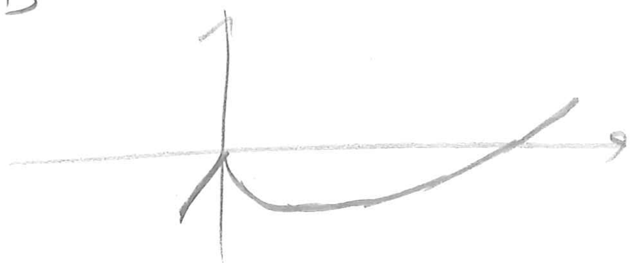
a) Plott funksjonen

b) Finn alle ekstremalpunkt for $f$.

c) Kva globale ekstremalpunkt har $f$?

---

a) $\rightarrow$ MATLAB



b) $f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{2/3 - 1} = 1 - 2x^{-1/3} =$

$1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

Ser: $f'$ er udef. når $x=0$ – men

$f(0)$ er veldefinert.

Nullpkt. for $f'$:

$f'(x) = 0$

$1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0$

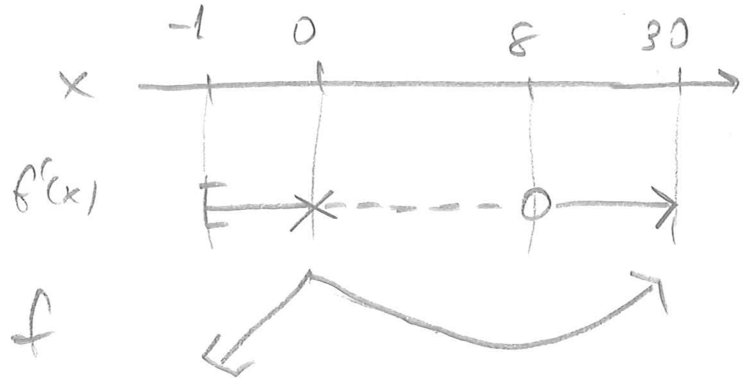
$1 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

$\sqrt[3]{x} = 2$

$x = 2^3 = 8$

Når er $f'(x) < 0$ og når er $f'(x) > 0$?

- Set opp fortegnsskjema:




Lokalt maksimum for $x=0$

NB: Ikkje noko maksimum for $x=30$, dette punktet er ikkje med i $D_f$.

Lokale minima for $x=-1$ og for $x=8$

$f(-1) = -1 - 3 \cdot (-1)^{2/3} = -4$

$f(0) = 0$

$f(8) = 8 - 3 \cdot 8^{2/3} = 8 - 3 \cdot 2 = -4$

Toppunkt: $(0,0)$

Botnpunkt: $(-1,-4)$ og $(8,-4)$

c) Globalt: <u>Begge</u> botnpunkta er globale

- Der er ingen globale maksimalpunkt;

$\lim_{x \to 30^-} f(x) = 1.0353 > 0$

## Eksempel

Kva er den største verdien denne funksjonen kan ha?:

$$f(x) = \sin(x) e^{-x^2}, \qquad D_f = [-2, 3]$$

---

Kandidater:

Randpunkter, $x=-2$ og $x=3$; og punkt der $f'(x)$ endrer forteiken

$$f'(x) = (\sin x)' e^{-x^2} + \sin x \, (e^{-x^2})' =$$

$$\cos x \, e^{-x^2} + \sin x \, e^{-x^2} \cdot (-x^2)' =$$

$$\cos x \, e^{-x^2} - 2x \sin x \, e^{-x^2} =$$

$$e^{-x^2} (\cos x - 2x \sin x) = 0$$

$$\cos x - 2x \sin x = 0$$

$$(\text{evt. } 1 - 2x \tan x = 0)$$

- Jobb for ... [?]

↳ Halveringsmetoden

- Sidan $f'(x)$ er kont., må $f'(x)$ vere null der $f'$ skifter forteiken.

Plotter $\cos x - 2x \sin x$, ser nullpunkt i to intervall, t.d. $[-2, 0]$ og $[0, 1]$.

- Køyrer skript to gonger.

Kandidater: $x = -0.6533$ og $x = 0.6533$

Funksjonsverdiar:

$f(-2) = -0.0167$

$f(-0.6533) = -0.3967$

$f(0.6533) = 0.3967$

f er odde; $f(-x) = -f(x)$

$f(3) = 1.742 \cdot 10^{-5}$

Maksimal verdi: <u>0.3967</u>

→ Plotte

$\boxed{?}$ Korleis kunne vi løyst denne oppgåva utan å bestemme $f'(x)$ analytisk?

→ Demonstrere med midtpunktsmetoden

NB: Svaret får <u>ikkje</u> vere avhengig av h; vi må sjekke dette!

Eksempel (eksamen des. -15, 6a)

Forklar kvifor fjerdegradspolynomet
$p(x) = x^4 - 5x + 3$
har akkurat eitt nullpunkt i intervallet
$[0, 1]$

$p'(x) = 4x^3 - 5 \cdot 1 + 0 = 4x^3 - 5$

Hvis $x \in [0, 1]$, er $x^3 \leq 1$

Difor er $4x^3 - 5 \leq 4 - 5 = -1 < 0$
$p'(x)$ er negativ i heile intervallet.
$p$ er strengt avtakande og kan difor ha maksimalt eitt nullpunkt i $[0, 1]$

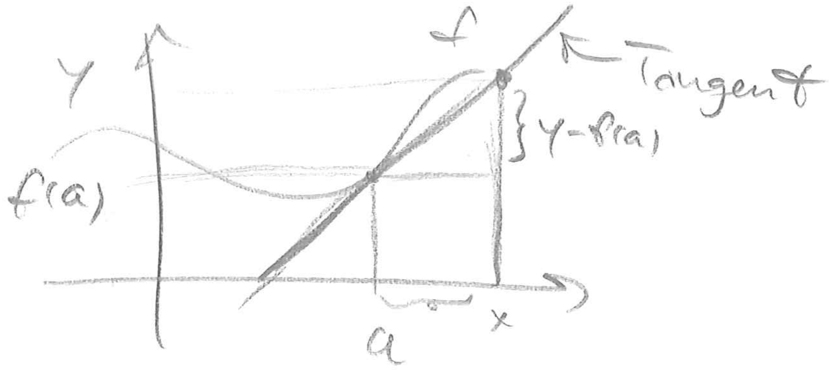
$p$ er elementær og kontinuerleg (for alle $x$).
$p(0) = 3 > 0$
$p(1) = 1 - 5 + 3 = -1 < 0$
$p$ har minst eitt nullpkt. ved skjæringssetninga.

$p$ har difor nøyaktig eitt nullpunkt i intervallet $[0, 1]$.

# ③ Lineær tilnærming

Tanke:

Dersom x ligg nær a, vil grafen til $f(x)$ „likne på" tangenten i punktet:




[?] Under kva føresetnad?

- $f$ er kont. og deriverbar for $x=a$.

[?] Kva er likninga for tangenten?

Stigningstal: $f'(a)$

Må ha: $$\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$y-f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y = f(a)+f'(a)(x-a)$$

Altså:

Dersom $f$ er kontinuerleg og deriverbar når $x=a$, er

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

når $x \approx a$

[?] Kva kan vi bruke dette til?

→ Masse!

Ofte kan problem bli mykje enklare om vi kan byte ut ein „krokete" $f(x)$ med ein lineær funksjon.

## Eksempel

Lat $p(x)$ vere likninga for tangenten til funksjonen $f(x) = \cos x$ for $x = \pi/2$.

a) Bestem $p(x)$

b) For $x = 1.6$, kor stor feil gjer vi om vi går ut frå at $f(x) = p(x)$?
- Enn for $x = 1.5$ og $x = 2$?

---

a) $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$

med $a = \pi/2$ og $f(x) = \cos x$

$f(a) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$f'(x) = -\sin x$

$f'(a) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$p(x) = 0 + (-1)(x - \pi/2) = -(x - \frac{\pi}{2}) = \pi/2 - x$

→ Plotte

b) $f(1.6) = \cos 1.6 = -0.0291995$

$p(1.6) = \pi/2 - 1.6 = -0.0292037$

Feil: $|f(1.6) - p(1.6)| = 4.15 \cdot 10^{-6}$

For $x = 1.5$:

$|f(1.5) - p(1.5)| = 5.91 \cdot 10^{-5}$

For $x = 2$:

$|f(2) - p(2)| = 0.01306$