DAFE1000 9/2 -18

(1) - Tidlegare godkjent arbeidskrav gjeld ikkje lenger

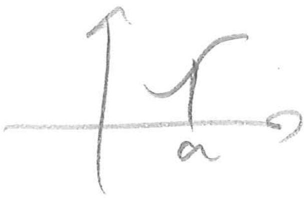
- Hugs å be om hjelp om du treng det

(2) Repetisjon:

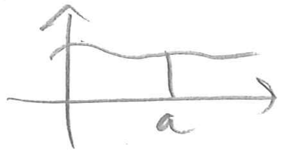
Den deriverte

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

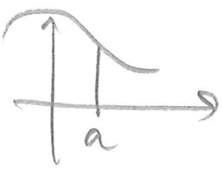
- Mål på kor mykje f endrar seg i forhold til x



$f'(a)$ er stor



$f'(a)$ er liten



$f'(a)$ er negativ.

Tilnærming: $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$\boxed{?}$ - Kva er skilnaden på denne og definisjonen?
- Når er det rett?

↪ når h er <u>liten</u>.

3

Også OK estimat:

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Kva for eit er best?

- Illustrere med $f'(1)$ for $f(x) = \sqrt{x}$

Sist: Fann at $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \frac{1}{2}$

- Kvifor brukte vi ikkje derivasjonsreglar? $\boxed{?}$

Midtpunktformelen for numerisk derivasjon:

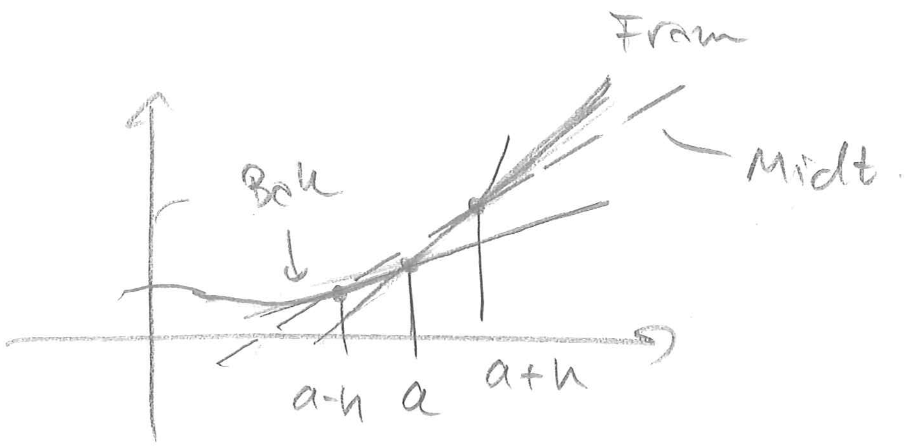
$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Dette er gjennomsnittet av framover- og bakoverformelen:

$$f'(a) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h} \right)$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2 \cdot h}$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$



Eksempel: Sjå s. 9 i notat frå 5/2 – og skriptet FolkOslo.m

(4) Derivasjonsreglar for elementære funksjonar

Har sett to alt:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \ldots = \cos x$$

(sjå notat frå 26/1, side 10)

$\sqrt{x}\,' = \frac{1}{2}$ for $x = 1$

Generelt:

$$\sqrt{x}\,' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{1/2 - 1}$$

Endå meir generelt

$$(x^r)' = r x^{r-1}$$

[?] Kva gjeld for r?

↳ r kan vere kva som helst.

Vi listar opp dei vi treng

$(x^r)' = r x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$ (1) $\quad (1)' = (x^0)' = 0$

$(e^x)' = e^x$ (2)

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (3)

$(\sin x)' = \cos x$ (4)

$(\cos x)' = -\sin x$ (5)

⑤ Meir generelle derivasjonsreglar

Linearitet

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$ ⑥

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x)$$ der c er ein konstant ⑦

Produktregelen

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$ ⑧

Kjerneregelen

Dersom $f(x) = g(u(x))$, er ⑨

$$f'(x) = g'(u)\cdot u'(x)$$

Eksempel:

Hvis $f(x) = \sin x^2$,

kan vi skrive at $f(x) = g(u(x))$ hvis $g(u) = \sin u$ og $u(x) = x^2$

Har då at $g'(u) = \cos u$ og $u'(x) = 2x$

$$f'(x) = \cos u \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

Eksempel

For kvar av desse funksjonane: finn den deriverte som funksjon av x:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \sin x + 2\ln x$$

$$h(x) = x^3 e^x$$

$$i(x) = 5 e^{5x}$$

$$j(x) = \sin(\cos x)$$

Merk: Akkurat som at f(x) er eit tal for ein gitt verdi av x, er også f'(x) eit tal for gitt x. På same måte f(x) varierar med variabelen x, er også f'(x) ein funksjon av x.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) \overset{1}{=} \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) \overset{6,7}{=} (\sin x)' + 2\cdot(\ln x)' \overset{3,4}{=} \cos x + 2\cdot\frac{1}{x}$$

$$h'(x) \overset{(8)}{=} (x^3)'e^x + x^3(e^x)' \overset{(1,2)}{=} 3x^2e^x + x^3e^x =$$

$$\underline{x^2e^x(3+x)}$$

$$i'(x) = (5e^{5x})' \overset{(7)}{=} 5\cdot(e^{5x})' \overset{(2,9)}{=} 5e^{5x}\cdot(5x)' \overset{(1)}{=}$$

$$5e^{5x}\cdot 5 = \underline{25e^{5x}}$$

$$j'(x) \overset{(9)}{=} \cos(\cos x)\cdot(\cos x)' = \cos(\cos x)\cdot(-\sin x)$$

$$= \underline{-\sin x\cos(\cos x)}$$

Eksempel

Bruk produktregelen for derivasjon til å komme fram til kvotient-regelen for derivasjon:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \qquad (10)$$

Med $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ er $u(x) = f(x)\cdot v(x)$

$$u'(x) \overset{(8)}{=} f'(x)\cdot v(x) + f(x)\cdot v'(x)$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\cdot v'(x)}{v(x)} =$$

$$\frac{\left(u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)}\cdot v'(x)\right)\cdot v(x)}{v(x)\cdot v(x)} =$$

$$\frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$$

Eksempel (Hvis tid)

a) Bruk kvotientregelen til å vise at $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

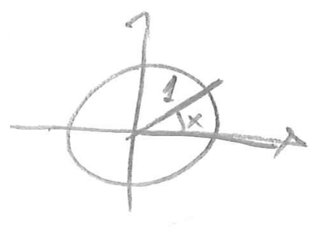
b) Bruk kjerneregelen og at $\sin(\arcsin x) = x$ til å vise at $\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

a) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \overset{(10)}{=} \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$\frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$\underline{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$

$= \underline{1 + \tan^2 x}$



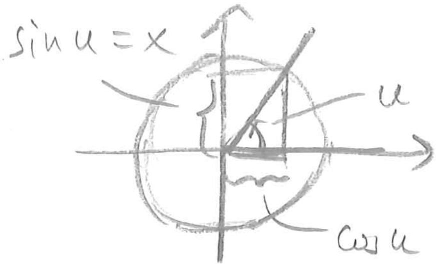
b) Med $u(x) = \arcsin x$

$\sin u(x) = x$

$\cos u \cdot u'(x) = 1$

$$u'(x) = \frac{1}{\cos u(x)}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$



Pytagoras: $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$

$$\cos u = +\sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1-x^2}$$

Pluss fordi $u = \arcsin x \in [-\pi/2, \pi/2]$, kor $\cos u \geq 0$.

Altså: $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Har også at

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Merk: Desse reglane kan de ta for gitt; det treng ikkje vise dei først (med mindre oppgåva seier det):

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Eksempel

Finn den deriverte som funksjon av x:

$$a(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$$

$$b(x) = \ln x^2$$

$$c(x) = (\ln x)^2$$

$$d(x) = \frac{x}{\cos(2x)}$$

$$a'(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)'$$

$$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (1-x^2)' \cdot \arcsin x +$$

$$\cancel{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}} =$$

$$\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) \arcsin x + 1 =$$

$$1 - \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

↳ plotte for $x \in [-0.9, 0.9]$

– også med midtpunktsformel.

$$b(x) = \ln x^2 = 2\ln x \quad \text{for } x > 0$$

$$b'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \quad \text{for } x > 0$$

$$b'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

Altså: $b'(x) = \frac{2}{x}$ – også for $x < 0$

$$c'(x) = 2\ln x \cdot (\ln x)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

$$d'(x) = \frac{(x)' \cdot \cos(2x) - x(\cos(2x))'}{(\cos(2x))^2} =$$

$$\frac{1 \cdot \cos 2x - x \cdot (-\sin(2x)) \cdot (2x)'}{\cos^2(2x)} =$$

$$\frac{\cos(2x) + 2x\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$$