DAFE 1000, 5/2 -18

① Innlev. 1 delt ut, innlev. 2 – oppgåvesettet er lagt ut.

Frist: 16. februar

NB: Slett ikkje alt er gjennomgått enda.

② Hovudbudskap sidan sist:

- Halveringsmetoden → Demo, grunnlag
- While-løkker
- Fikspunktiteraston

→ Eksempel

③ Eksempel om Hanoi-tårnet, sjå s. 8 i notat frå 2/2.

④ Eksempel

Estimer ei løysing av likninga

$$e^{x-3} = x^2 + 1$$

ved fikspunktiterasjon. Feilen skal vere mindre enn 10^{-6}.

- Skjema: - Skrive likninga som

$x = f(x)$

- Velge x_0
- Iterere på $x_{n+1} = f(x_n)$ til

$x_{n+1} \approx x_n$

- Fleire måtar å velge $f(x)$:

$e^{x-3} = x^2+1$

$x-3 = \ln(x^2+1)$

$x = \underbrace{\ln(x^2+1)+3}_{f(x)}$

eller

$x^2 = e^{x-3}-1$

$x = \pm\sqrt{e^{x-3}-1}$

Plott: $x_0 = 5$ ser ut til å vere ok.

Med den siste forma, blir x_n ganske fort imaginær.

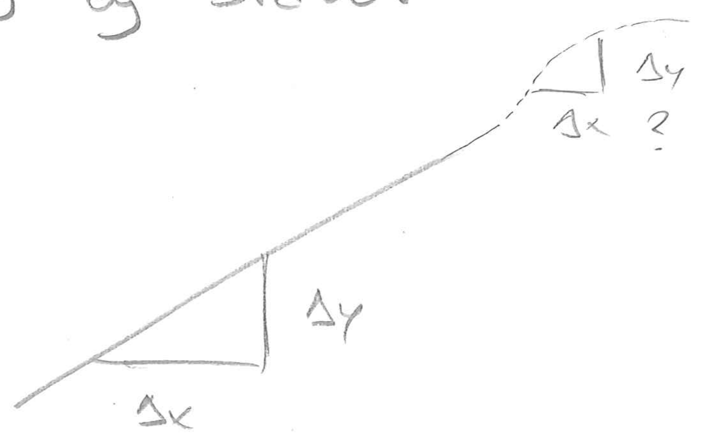
Den første forma, derimot, fungerar.

- Implementerar med while og maksgrense: FikspunktWhile.m

- Viser også korleis dette kan gjerast effektivt på kalkulator.

5 Den deriverte

Skulebakken, frå ring 3 i Nydalen til Betzy Kjeldsbergs vei på Grefsen: Lang og bratt!



[?] Korleis måle kor bratt den er?

- Høgdeforskjell delt på lengdeforskjell:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

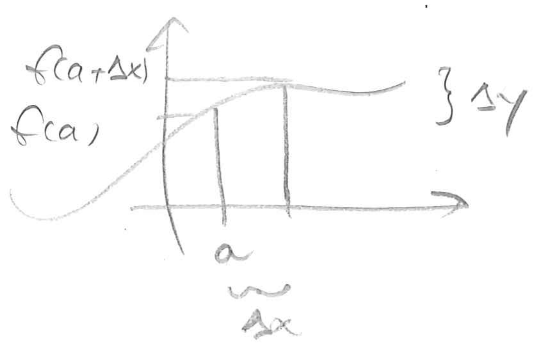
Men: Heilt på slutten blir den endå brattare. Korleis måler vi kor bratt den er der [?]

- Vanskeleg å snakke om høgde-endring utan å snakke om endeleg flytting.

- Ser på $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ når Δx (og Δy) blir „uendeleg liten"

Dette er definisjonen av den deriverte til funksjonen $f(x)$ i punktet $x=a$:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



Vanlegare skrivemåte: „h" i staden for „Δx".

Definisjon:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Den deriverte er eit mål på kor mykje f endrar seg når x endrar seg.

Eksempel

a) Forsøk å estimere $f'(1)$ og $f'(100)$ for $f(x) = \sqrt{x}$.

b) Bestem desse verdiane eksakt.

---

a) Skript: EstimerDerivert.m

b) $$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1+h}^2 - 1^2}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}$$

Tilsvarande:

$$f'(100) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{100+h} - 10}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{100} + h - \cancel{100}}{h(\sqrt{100+h} + 10)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{100+h} + 10} = \frac{1}{20}$$

Plotte: Grafen stig mindre og mindre bratt.

⑥ Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon

Merk:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Det betyr vel at $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ når h blir liten nok.

Men må h vere positiv $\boxed{?}$

↳ Nei.

Om vi lar h bli negativ – eller byter ut h med $-h$ og lar h bli verande positiv:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

$\boxed{?}$ Spelar det ei rolle korleis vi estimerar $f'(a)$?

- Testar for $f'(1)$ med $f(x) = \sqrt{x}$.
- Plotter feilen – logaritmisk

Men kva om vi tar snittet?

Hvis $f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ og

$$f'(a) \approx \frac{f(a) - f(a-h)}{h}, \text{ er}$$

vel også

$$f'(a) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}\right)$$

$$= \frac{f(a+h) - \cancel{f(a)} + \cancel{f(a)} - f(a-h)}{2h} =$$

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

- Testar igjen: $f'(1)$ med $f(x) = \sqrt{x}$ med midtpunktsformelen.

Eksempel

a) Estimèr $f'(2)$ for $f(x) = x^3$ numerisk.

b) Stadfest svaret ditt ved å rekne det eksakt.

---

a) → RekneDeriverte.m

b) $$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2(2+h) - 8}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(4+4h+h^2)(2+h) - 8}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cancel{8} + 4h + 8h + 4h^2 + 2h^2 + h^3 - \cancel{8}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} (12 + 6h + h^2) = 12 + 6\cdot 0 + 0^2 = \underline{12}$$

Eksempel

Tabell over folketalet i Oslo frå 2004 til 2014.

Bruk denne til å plotte farten folketalet veks med – år for år.

År	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Folk	526887	543514	567980	593045	618683	634293

→ FolkOslo.m