DAFE 1000, 2/2 -18

1. Innlevering 1 - utlevering
   Innlevering 2 lagt ut i dag.

2. Repetere definisjon av kontinuitet:

   f er kont. for $x=a$

   $$\Updownarrow$$

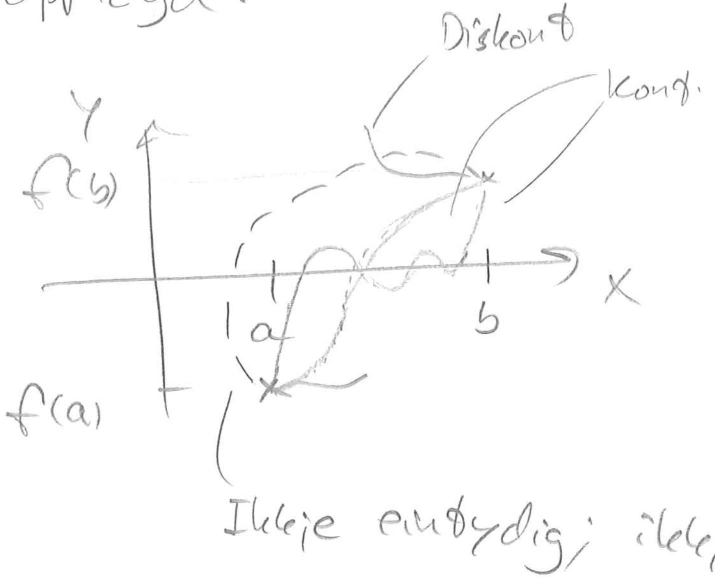
   $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

   - Fullføre eksempel frå mandag (frå side 8 i notatet).

3. Skjeringssetninga:

   Dersom $f(x)$ er kont. for alle $x \in [a,b]$ og $f(a)$ og $f(b)$ har ulike forteikn, har f minst eitt nullpunkt mellom a og b.

[?] Opplagd?



$f(a) < 0$ og

$f(b) > 0$

$(f(a) \cdot f(b) < 0)$

Altså: Det eksisterar (minst) ein $c \in [a, b]$ som er slik at $\underline{f(c) = 0}$.

Halveringsmetoden (den andre læreboka kallar midtpunktmetoden)

Eksempel

a) Kvifor må $f(x) = e^x + x - 5$ ha eit nullpunkt mellom 0 og 3?

b) Der er berre eitt nullpunkt. Ligg dette i $[0, 1.5]$ eller $[1.5, 3]$?

[?] Kvifor ikkje gjenta prosedyren?

- Ligg nullpunktet mellom 0 og 0.75 eller mellom 0.75 og 1.5?
- Etc.

→ Demo i MATLAB

4 Halveringsmetoden (algoritme)

- For å løyse ei likning på forma $f(x)=0$

1) Bestem eit intervall $[a,b]$ som er slik at f er kont. på intervallet og $f(a)$ og $f(b)$ har ulike forteiken.

2) Finn midtpunktet $c=\frac{a+b}{2}$ og bestem funksjonsverdien $f(c)$.

3a) Dersom $f(a)$ og $f(c)$ har same forteiken, lat c bli din nye a.

3b) Viss ikkje, lat c bli din nye b.

4) Gjenta 2 og 3 heilt til $b-a$ er liten nok.

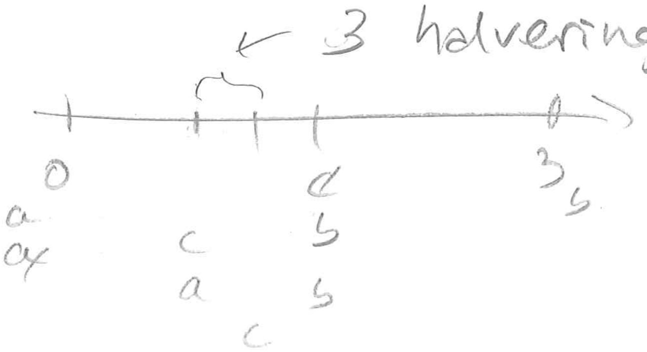
5) Lat x vere midtpunktet til sist.

→ Implementere med eit eller anna tal på iterasjonar (for-løkke)

[?] Kvifor oppdaterar vi ikkje $f(a)$ og $f(b)$?

Eksempel

For likninga $e^x + x - 5 = 0$, om vi tar utgangspunkt i det lukka intervallet $[0, 3]$, kor mange iterasjonar må vi gjere med halveringsmetoden for å finne eit svar med ein feil som er mindre enn 10^{-8}?



Breidde $b-a$: Halvert n gonger,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

- Lar x vere midtpunktet til slutt:
Feilen er mindre enn $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a)$

Altså

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(b-a) < 10^{-8}$$

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < 10^{-8}$$

$$b-a < 10^{-8}\cdot 2^{n+1}$$

$$\frac{b-a}{10^{-8}} < 2^{n+1}$$

$$2^{n+1} > 10^{8}(b-a)$$

Generelt:
Med feil mindre enn p:

$$n = \left\lceil \frac{\ln(p\cdot(b-a))}{\ln 2} \right\rceil$$

$$(n+1)\ln 2 > \ln\left(10^{8}(b-a)\right)$$

$$n > \frac{\ln(10^{8}(b-a))}{\ln 2} = \frac{\ln(10^{8}\cdot(3-0))}{\ln 2} = 28.16$$

- Vi må gjere 29 iterasjonar.

→ Implementere.

[?] Men dette er jo berre ein metode for likningar på forma $f(x)=0$ ... ?

- Men <u>alle</u> likningar (i ein variabel) kan skrivast slik.

NB: Vi har her ein metode som løyser <u>kva likning som helst</u> – så lenge funk. er kont.

<u>Eksempel</u>

a) Bruk halveringsmetoden for å estimere den eine løysinga av likninga

$\sin^2 x = 1 - 2\cos x$

som ligg i intervallet $[0, 2]$.

Feilen skal vere mindre enn 10^{-4}.

b) Akkurat denne likninga kan løysast eksakt. Gjer det og stadfest at feilen i a) er så liten som den skal.

---

a) Enkel oppdatering av implementeringa.

$\Rightarrow$ >> x = 1.57074

b) $\sin^2 x = 1 - 2\cos x$

Har: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x = 1 - 2\cos x$

$2\cos x = \cos^2 x$

$2 = \cos x$? Nei!

$\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$\cos x\,(\cos x - 2) = 0$

$\cos x = 0$ eller $\cancel{\cos x - 2 = 0}$

$x \in [0, 2]$

$\underline{x = \pi/2} \approx 1.570796$

Feil: $\left|\frac{\pi}{2} - 1.570841\right| = \underline{5.658 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}}$

OK

5 While-løkker

Ny betring: Droppe „for" i halverings-metode-implementeringa og sette inn while $b - a >$ Pres, der Pres er ein førehands definert presisjon.

while: Litt til felles både med for og if.

Struktur

```
while <logisk påstand>
    <gjer noko>
end
```

Merk: <u>Ikkje</u> „idiotsikker" (while 1>0 ...)

- Kan få bruk for $\boxed{\text{ctrl + C}}$.

Eksempel

Kor mange ringar må der vere i Hanoi-tårnet for at du må bruke minst 5000 flytt?
Enn èin million?

→ Skript: HanoiFlytt.m

(6) Ende ein iterativ liknings-løysar:

Fikspunktiteraśion

Eit fikspunkt for ein funksjon f er ein funksjon som oppfyller

$x = f(x)$.

- Om vi kan skrive likninga slik, kan vi kanskje klare å løyse ho ved å „gjette" på ein startverdi x_0 og så iterere på $x_{n+1} = f(x_n)$

Når $x_{n+1} \approx x_n$, er likninga løyst (tilnærma).

Vidare: Forskjellen $|x_{n+1} - x_n|$ seier noko om kor stor feilen er.

Eksempel

Løys likninga

$$e^x + x - 5 = 0$$

ved fikspunktiteraśion

- Vel, t.d., $x_0 = 1$

Merk: Likninga kan skrivast som $x = f(x)$ på fleire måtar:

$e^x + x - 5 = 0$ eller $e^x = 5 - x$

$x = e^x + 5$ $\qquad$ $x = \ln(5-x)$

NB: Likninga er ikkje løyst; x står også på høgresida.

- Testar!
  (Går det så går det.)

Skript: FiksPunkt.m

- Brukar både for og while.

Hvis tid:

- Sette inn ei maksgrense på while-implementeringa.