# DAFE1000 26/1

1. Beskjedar, info.?

   Definisjon: s. 150 i læreboka

2. Eksempel

Bestem desse grenseverdiane dersom dei eksisterar

a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2-8}{x^2-x-2}$

b) $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-x-2}$

c) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-8}{x^2-x-2}$

---

a) Uttrykket er veldefinert for $x=1$; det er berre å setje inn:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-8}{x^2-x-2} = \frac{2 \cdot 1^2 - 8}{1^2-1-2} = \underline{3}$$

- Her brukar vi at funksjonen er kontinuerleg. Kvifor er den det?
- Fordi alle elementære funksjonar er kontinuerlege der dei er definerte.

b) Her går både teljar og nemnar mot null når $x \to 2$.
Altså er $x-2$ faktor i begge polynoma – både det i teljaren og det i nemnaren.

3. kvsetn.
$$2x^2-8 = 2(x^2-4) = 2(x-2)(x+2)$$
$$x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x+2)}{x+1}$$

Kont.
$$= \frac{2\cdot(2+2)}{2+1} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

c) Undersøke numerisk først?

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-x-2}$$

Triks: Deler teljar og nemner på høgste potens i nemnar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-8}{x^2-x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2-8):x^2}{(x^2-x-2):x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$\frac{1}{x}$ blir veldig liten når $x$ blir stor.
$\frac{1}{x^2}$ blir enda mindre.

$$\dots = \frac{2-0}{1-0-0} = \underline{\underline{2}}$$

$\boxed{?}$ Kva blir $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-8}{x^2-x-2}$ ?

og $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-8}{x^2-x-2}$ ?

(0, udefinert)

## ③ Eksempel

Undersøk numerisk kva brøken $\frac{\sin x}{x}$ nærmar seg når $x \to 0$.

„x går mot 0"

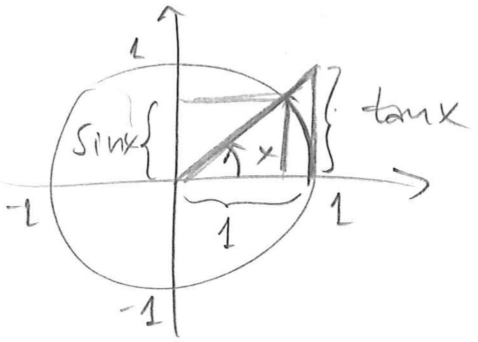
Skisse:

```
% <Forklaring>

f=@(x) sin(x)/x;     % Funksjon
a=0;                 % Grense for x
h=1                  % Skal bli mindre og mindre
f(a+h)

for n=1:10
    h=h/5;  } → disp([h, f(h)])
    f(a+h)  }
end
```

Ser ut til at det går mot 1

– Og det stemmer

Kvifor er $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$?




Ser:

$x < \tan x$ og

$x > \sin x$

Eller $1 > \frac{\sin x}{x}$

$x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$x \cos x < \sin x$

$\cos x < \frac{\sin x}{x}$

Altså: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\frac{\sin x}{x}$ ligg mellom $\cos x$ og 1.

Men: $\cos x \to 1$ når $x \to 1$

$\frac{\sin x}{x}$ blir „skvist mellom 1 og".

Altså må vi ha at

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

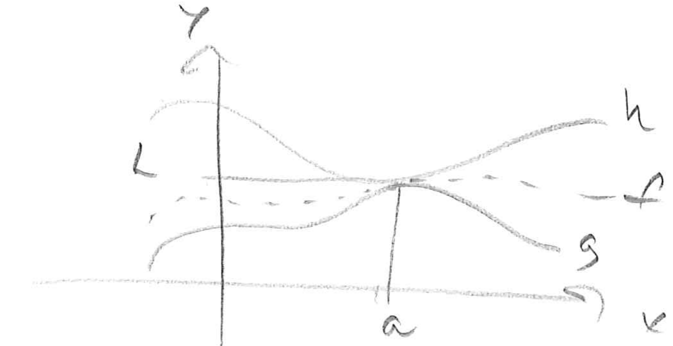
Her har vi brukt det vi kallar „skvisteoremet"

Teorem: Viktig (matematisk resultat.

Dersom $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ og

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for alle $x$ nær $a$,

er $\lim_{x \to a} f(x) = L$




Poeng: Vi har no berre sett på grensa når $x$ går mot 0 frå oversida.

Einsidig grenseverdi

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ ← Einsidig grenseverdi

Kan vise at også $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$

→ sjekk om dette ser ut til å stemme numerisk.

For at ein grenseverdi skal vere veldefinert, må grensa vere den same frå begge sider

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr at både

$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ og $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

④ Eksempel med udefinerte grenseverdiar
(Sjå evt. notat frå 22/1, side 10.)

Kvifor er desse grenseverdiane udefinerte?

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{x-3}$

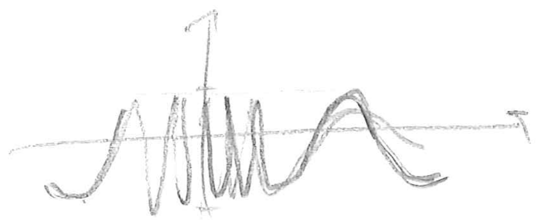
b) $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

---

a) Her går nemnaren mot 0 mens teljaren går mot 10. Brøken vil altså vekse utan grenser i absolutt-verdi når $x \to 3$

b) Plotte



$\sin u$ er alltid avgrensa. Men når $x \to 0$, vil $\frac{1}{x}$, i absoluttverdi vekse over alle grenser – og $\sin \frac{1}{x}$ vil variere mellom -1 og 1 stadig raskare. Det vil ikkje nærme seg noko bestemt tal i det heile.

c) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

- Går ut frå, først, at $x > 0$ slik at $|x| = x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

NB

- Så: $x < 0$: $|x| = -x$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$$

⑤ Eksempel

Av og til må vi „jobbe litt" for å bestemme grensa.

Bestem desse grenseverdiane – dersom dei er definerte

a) $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} \right)$

c) $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$, e) $\lim_{x \to \infty} \frac{5x - 3\cos x}{\sqrt{x^2+3}}$

a) Sjekke numerisk?

Variabelbytte: $u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u}$

$x \to \infty \Rightarrow u \to 0^+$

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} \sin u = \lim_{u \to 0^+} \frac{\sin u}{u} \overset{\boxed{?}}{=} \underline{1}$$

Triks

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) =$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} \overset{\text{3. kv setn.}}{=}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+2}^2 - \sqrt{x-2}^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2-(x-2)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0$$

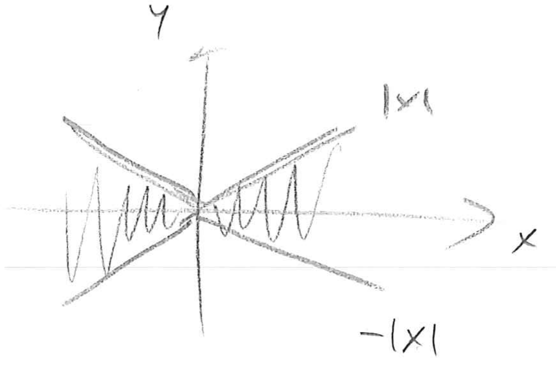
c) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$ NB: Ulike a)!

Veit: $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ er ikkje definert.

Men: $\sin\frac{1}{x} \le 1$ for alle $x$ og

$\sin\frac{1}{x} \ge -1$ — " — —

Difor gjeld $-|x| \le x \sin\frac{1}{x} \le |x|$




$$\lim_{x\to 0} -|x| = \lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Difor er $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \underline{0}$ ved „skvis-teoremet"!

d) Sum-formel for sinus:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,.$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$

NB

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1}$$

„konstant"

Triks

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} + \cos x \cdot 1$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} + \cos x =$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} + \cos x =$$

$$- \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} + \cos x =$$

$$- \sin x \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1}}_{\boxed{?}} + \cos x =$$

$$\cos x$$

$\boxed{?}$ Kva har vi bevist no?

- At $(\sin x)' = \cos x$.

e) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x - 3\cos x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{(5x - 3\cos x) : x}{\sqrt{x^2+3} : x} =$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{5 - 3\frac{\cos x}{x}}{\sqrt{(x^2+3) : x^2}} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{5 - 3\frac{\cos x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}$

$|\cos x| \leq 1$ – alltid

$\dfrac{\cos x}{x} \to 0$ når $x \to \infty$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{5x - 3\cos x}{\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{5 - 3\frac{\cos x}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}} =$

$\dfrac{5 - 3 \cdot 0}{\sqrt{1 + 0}} = \underline{5}.$