# DAFE 1000, 22/1

(1) Innlevering

- Siste frist: Fredag 16:15 (til Markus)
- Før det: I boks i hylle vis à vis kontoret ~~mitt~~ (PS234)

(2) Repetere siste eksempel frå fredag.

(3) Har sagt at <u>nesten</u> alle reknereglar vi har for reelle tal også gjeld for komplekse tal. Men der er unntak:

$$1 = \sqrt{1^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} =$$

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

„$1 = -1$" ?!

(?) Kvar gikk det galt?

↳ Oppg. 2.3.20

④ Oppsummering: kva skal vi kunne med komplekse tal?

- Rekne mellom kartesisk form og polar form, $z = x+iy = re^{i\theta}$.
- Framstille komplekse tal som punkt i det komplekse planet
- Løyse likningar av 1. og 2. grad og finne $n$-te-røter av komplekse tal.
-

<u>Eksempel</u>

Løys desse likningane og skriv svaret på polar form eller kartesisk form.

a) $(2-i)z - 3 = 3i - 4z$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

c) $3 - 2i + z^3 = 0$

---

a)

$$(2-i)z + 4z = 3 + 3i$$

$$z(6-i) = 3+3i$$

$$z = \frac{3+3i}{6-i} = \frac{(3+3i)(6+i)}{(6-i)(6+i)} = \frac{3\cdot 6 + 3i + 3i\cdot 6 + 3i^2}{6^2+1^2} =$$

$$\frac{15+21i}{37} \quad \left(= \frac{15}{37} + \frac{21}{37}i\right)$$

b) $x^2 - 2x + 2 = 0$

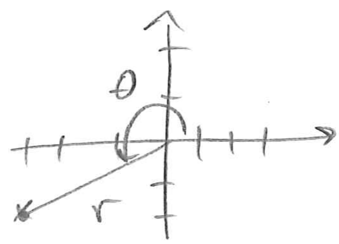
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Merk: Hvis $z$ er ei løysing av $ax^2 + bx + c = 0$ og $a, b, c \in \mathbb{R}$, er også $\bar{z}$ ei løysing.

↳ Oppg. 21.15

c) $3 - 2i + z^3 = 0$

$z^3 = -3 + 2i = re^{i\theta}$




$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\tan\theta = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

$\theta = \arctan\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi$
$= 2.5536$

$$z^3 = \sqrt{13}\, e^{i\cdot 2.5536} = \sqrt{13}\, e^{i(2.5536 + n\cdot 2\pi)}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = \left(\sqrt{13}\cdot e^{i(2.5536 + n\cdot 2\pi)}\right)^{1/3}$$

$$= \sqrt{13}^{1/3} \cdot e^{\frac{i}{3}(2.5536 + n\cdot 2\pi)} =$$

$$13^{1/6} \cdot e^{i(0.8512 + n\cdot \frac{2}{3}\pi)}$$

$n=0$:

$z_0 = 13^{1/6} e^{0.8512 i}$

$n=1$:

$z_1 = 13^{1/6} e^{i(0.8512 + \frac{2}{3}\pi)} = 13^{1/6} e^{2.9456 i}$

$z=2$:

$z_2 = 13^{1/6} e^{i(0.8512 + 2\cdot \frac{2}{3}\pi)} = 13^{1/6} e^{5.0400 i}$

$z=3$ [?]

↳ Får tilbake $z_0$

# (5) for-løkker

Eksempel: Tårnet i Hanoi

→ Online applikasjon

[?] Hvis $a_n$ er # flytt vi må gjøre med $n$ ringar, kor stor er $a_{n+1}$?

Sjå:

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 7 |
| ⋮ | |
| $n$ | $a_n$ |
| $n+1$ | $2a_n+1$ |

Rekursjonsformel

$a_{n+1} = 2a_n + 1$

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$

$\vdots$

Kor mange flytt må vi gjere med 20 ringar?

1) Kan finne formel i dette tilfellet

2) Kan få MATLAB til å gjere det

Skript:

```
a = 1;
Nmax = 10;     % Talet på ringar

for n = 2:Nmax
   a = 2*a + 1;   % Neste tal på flytt
end

a     % Skriv svaret til skjerm
```

---

2

- Kva om vi ikkje berre vil ha svaret for Nmax, men også alle mellom?
- Poeng: Allokering

# ⑥ Grenseverdiar - numerisk

„– Å nærme seg noko er ikkje det same som å vere der"

Det du får når $x = a$, treng ikkje vere likt det du får når $x$ ligg veldig nær $a$ – uansett kor nær.

Eksempel: Mark-brøk vs. kor enkelt det er å ete eit eple.

Anna eksempel:

Med $f(x) = \dfrac{\cos x - 1/2}{x - \pi/3}$

$\boxed{?}$ Kva er $D_f$ ?

↳ $\mathbb{R} \setminus \{\pi/3\}$

Altså: $f(\frac{\pi}{3})$ finst ikkje.

Men: $f(x)$ kan nærme seg eit bestemt tal når $x$ nærmar seg $\pi/3$.

- Studerer dette i MATLAB:

Numerisk: NB! Maskinpresisjonen er viktig

og

grafisk: - Plott

- (Semi) logaritmisk
- Frå overside og underside

NB! Det er dette de skal gjere på innleveringa.

Skript: - RekneGrenseverdi.m

- PlottGrenseverdi - 3 versjonar

Skripta blir ikkje lagt ut før innleveringa.

## (7) Grenseverdiar - analytisk

- Mange triks; skal sjå på nokre

Dei enklaste grenseverdiane:

Der vi kan sette grensa rett inn

Eksempel

Bestem $\lim_{x\to 2} 5x^2$

$\lim_{x\to 2} 5x^2 = 5 \cdot 2^2 = \underline{20}$

- Lett fordi funksjonen, $5x^2$, er kontinuerleg for $x=2$. Vi skal forklare kva dette er meir presist neste veke.

Andre gonger kan vi løyse problemet ved å korte.

„Banalt" eksempel: $f(x) = \frac{x}{x}$

(?) Kva er forskjellen mellom $f(x)$ og 1?

$f(x) = 1$ så lenge $x \neq 0$.

Men $f(0)$ er udefinert.

$\lim_{x\to 0} f(x)$, derimot, er definert.

$f(x) = 1$ så lenge $x \neq 0$; $x$ kan vere så nær 0 det vil.

# Eksempel

Bestem denne grensa: $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 20x + 50}{x^2 - 25}$

---

$2x^2 - 20x + 50 = 2(x^2 - 10x + 25) = 2(x-5)^2$

- 2. kvadratsetning

Alternativt:

$2x^2 - 20x + 50 = 0$

$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50}}{2 \cdot 2} = \frac{20 \pm 0}{4} = 5$

$2x^2 - 20x + 50 = 2(x-5)(x-5) = 2(x-5)^2$

$x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$

- 3. kvadratsetning

Alternativt:

$x^2 - 25 = 0$

$x^2 = 25, \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x^2 - 25 = 1(x-(-5))(x-5) = (x-5)(x+5)$

$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 20x + 50}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5} \frac{2\cancel{(x-5)^2}}{\cancel{(x-5)}(x+5)} =$

$\lim_{x \to 5} \frac{x-5}{x+5} = \frac{5-5}{5+5} = \underline{\underline{0}}$

---

Enklare: $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 20x + 50}{x^2 - 25} = \frac{2 \cdot 0 - 20 \cdot 0 + 50}{0^2 - 25} = \underline{\underline{-2}}$

Når x blir „uendeleg stor":

$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 20x + 50}{x^2 - 25} = \lim_{x \to \infty} \frac{(2x^2 - 20x + 50) : x^2}{(x^2 - 25) : x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{20}{x} + \frac{50}{x^2}}{1 - \frac{25}{x^2}} = \frac{2-0}{1-2} = \underline{\underline{2}}$

Andre gonger vil ikkje grenseverdien vere veldefinert.

Eksempel

Forklar kvifor desse grenseverdiane ikkje er definerte

a) $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2+20x+50}{x^2-25}$

b) $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$

---

a) Ser at $x^2-25 \to 0$ og $2x^2+20x+50 \to 200$ når $x \to 5$. Brøken vil difor gå mot $\pm\infty$. Grenseverdien er ikkje veldefinert.

b) $\frac{1}{x} \to \pm\infty$ når $x \to 0$. $\sin\frac{1}{x}$ vil variere – stadig raskare – mellom $-1$ og $1$ når $|x|$ blir mindre og mindre. I grensa $x \to 0$ er det umogeleg å tileigne $\sin\frac{1}{x}$ nokon verdi – sjølv om $\sin\frac{1}{x}$ alltid er endeleg