# DAFE 1000, 19/1

① Minne om innlevering fredag

- Kan levere til meg i undervisinga eller i Soles vis à vis kontoret
- Plott og kode skal vere med i ta utskrift
- Skriv tydeleg namn og studentnummer
- Oppg. 3: Går gjennom grunnlaget på mandag

② Litt påminning frå sist

Komplekst tal: $z = x + iy$, $i = \sqrt{-1}$

$x$ og $y$ er reelle $(x, y \in \mathbb{R})$

– Kartesisk form

Kompleks-konjugert: $\bar{z} = x - iy$

Brukar kompl.-konj. for å få brøkar med kompleks nemnar på kartesisk form.

Poeng: $z \cdot \bar{z}$ er alltid reell og positiv (for $z \neq 0$). Sjekk!

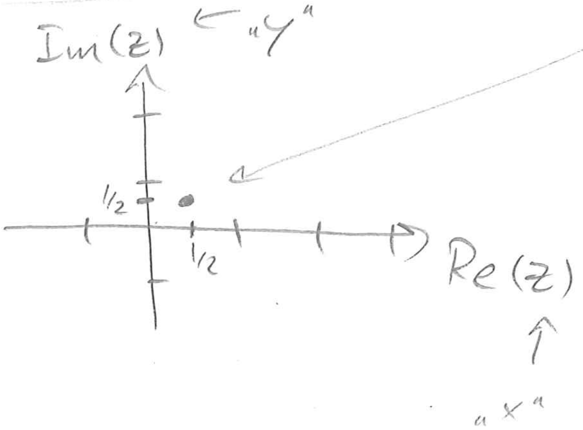
Eksempel:

$$\frac{3-i}{2-4i} = \frac{3-i}{2(1-2i)} = \frac{(3-i)(1+2i)}{2(1-2i)(1+2i)} =$$

$$\frac{3+6i-i-2i^2}{2(1^2-\cancel{2i}+\cancel{2i}-(2i)^2)} = \frac{3+5i-2\cdot(-1)}{2(1^2+2^2)} =$$

$$\frac{5+5i}{10} = \underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}$$

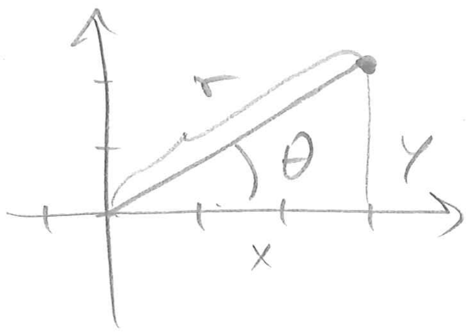
## ③ Det komplekse planet (2.2)




- Kan framstille talet som eit punkt i eit plan.

[?] Såleis: Kva er eigentleg forskjellen

på eit komplekst tal og ein
vektor med to reelle element?
(er $\mathbb{C}$ og $\mathbb{R}^2$ ulike?)




$z = 3 + 2i$

Alternativ måte å gi komplekse tal på:
Polarform

Ser: $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Pytagoras:
$r^2 = x^2 + y^2$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$

altså: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z$ gitt ved $r$ og $\theta$ – i staden
for $x$ og $y$.

- Fungerar også når $\theta$ ikkje er
i 1. kvadrant.

Krever at $r$ er positiv (og reell).

Eksempel: Bestem $r$ og $\theta$ for

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$, b) $w = 5.3 + 7.4i$ (sjå s. 8)

Har tidlegare påstått at eksponential-
funksjonar og trigonometriske
funksjonar eigentleg er det same.
No får de vite korleis:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

- Skal ikkje gå inn på grunngjevinga [begrunnelsen] for dette (dessverre).

- Reknereglane med komplekse/imaginære potensar er som før - med reelle tal.

Det betyr:

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i\alpha + i\beta}$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

- Ikkje heilt opplagt.

$$\overline{e^{i\theta}} = \overline{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos\theta - i\sin\theta =$$

$$\cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta = \cos(\theta + n2\pi) + i\sin(\theta + n\cdot 2\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$= e^{i(\theta + n\cdot 2\pi)}, \quad e^{i\theta} = e^{i(\theta + n\cdot 2\pi)}$$

Altså: Polarforma av eit komplekst tal er ikkje eintydig. Men ho er det om vi krever at $\theta$ skal ligge i, t.d., første omløp – eller mellom $-\pi$ og $\pi$. MATLAB gjer det siste.

Polarforma gjer ein del ting enklare:

Med $z_1 = r_1 e^{i\theta_1} = x_1 + i y_1$ og
$z_2 = r_2 e^{i\theta_2} = x_2 + i y_2$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

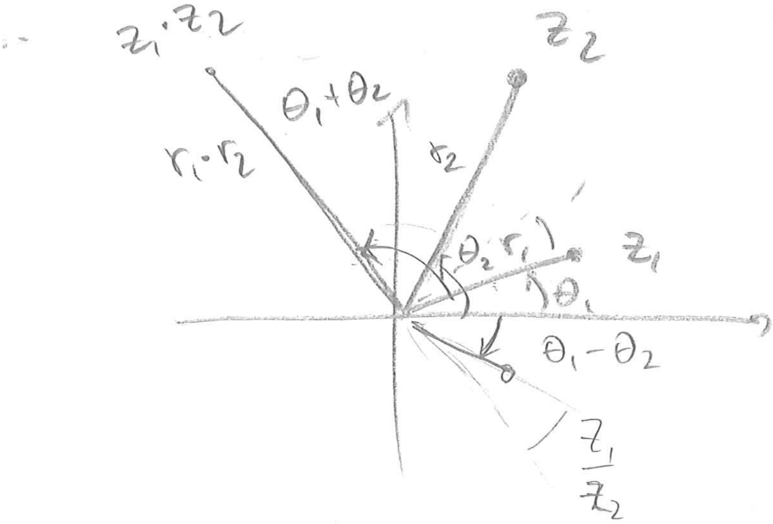
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 \cdot r_2 \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \ldots =$$

$$\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Geometrisk




r:
Lengde/modulus/absoluttverdi

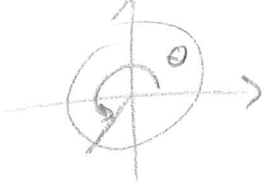
$\theta$:
Vinkel/fase

Eksempel

a) Finn dei kartesiske formene av desse komplekse tala:

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$$
$$z_2 = 3.1e^{-1.17i}$$

b) Rekn ut $z_1 \cdot z_2$ og $z_2/z_1$ – både på kartesisk form og polarform.




$$z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$
$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$-\sqrt{2}(1+i)$$

$$z_2 = 3.1\left(\cos(-1.17) + i\sin(-1.17)\right) =$$

$$\underline{1.2095 - 2.8543i}$$

$$z_1 \cdot z_2 = -\sqrt{2}\,(1+i)\,(1.2095 - 2.8543i) =$$

$$-\sqrt{2}\,(1.2095 - 2.8543i + 1.2095i -$$

$$2.8543i^2) = \ldots = -5.7481 + 2.3262i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1.2095 - 2.8543i}{-\sqrt{2}\,(1+i)} = \frac{(1.2095 - 2.8543i)(1-i)}{-\sqrt{2}\,(1+i)(1-i)} =$$

$$\frac{1.2095 - 1.2095i - 2.8543i + 2.8543i^2}{-\sqrt{2}\,(1^2+1^2)} = \ldots =$$

$$\underline{0.5815 + 1.4368i}$$

Polarform:

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \cdot 3.1\, e^{-1.17i} =$$

$$2 \cdot 3.1\, e^{i\left(\frac{5\pi}{4} - 1.17\right)} \quad \underline{= 6.2 \cdot e^{2.7570i}}$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3.1\, e^{-1.17i}}{2\, e^{i\,5\pi/4}} = \frac{3.1}{2}\, e^{i\left(-1.17 - \frac{5\pi}{4}\right)}$$

$$\underline{= 1.55\, e^{-5.0970i}}$$

## Eksempel

Bestem polarforma av desse komplekse tala:

a) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z = 5.3 + 7.4i$

c) $z = -3 + i$

---

Har at $z = x + iy = re^{i\theta}$ der

$r^2 = x^2 + y^2$ og $\tan\theta = \frac{y}{x}$

a) $z = re^{i\theta}$

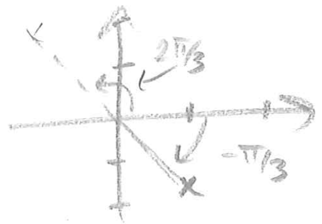
med $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

og $\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

$\arctan -\sqrt{3} = -\arctan\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$

Men $-\frac{\pi}{3} + \pi$ har same tangens-verdi.

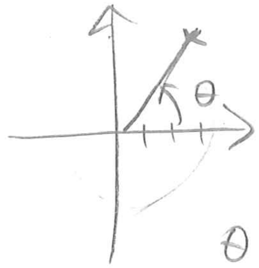
[?] Kva for ein skal eg velge?




– Skal ha $\theta = -\frac{\pi}{3}$ (evt. $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$)

$z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) $z = 5.3 + 7.4i = re^{i\theta}$



$r = \sqrt{5.3^2 + 7.4^2} \doteq 9.1022$

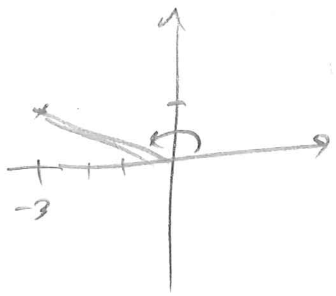
$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\tan\theta = \frac{7.4}{5.3}$

$\theta = \arctan \frac{7.4}{5.3} = 0.9493$

$z = \underline{9.1022 \; e^{0.9493i}}$

c) $z = -3 + i = re^{i\theta}$




$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\tan\theta = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

$\arctan -\frac{1}{3} = -0.3218$

$\theta = -0.3218 + \pi = 2.8198$

$z = \sqrt{10}\, e^{2.8198i}$

-Viser korleis MATLAB finn r og $\theta$:

>>abs(z) og >>angle(z)

$\boxed{?}$ For c): Kva er $z^6$?

$\boxed{?}$

$z^6 = \sqrt{10}^6 e^{2.8198i \cdot 6} = 1000\, e^{16.9191i} = 1000\, e^{4.3528i}$

## 3 Røter av komplekse tal (2.3)

Eksempel

Bestem alle $z \in \mathbb{C}$ som er slik at $z^4 = 1+i$

---

$1+i = re^{i\theta}$ med $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

og $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

[?] Kvifor ?

$z^4 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}$

→ Fordi $e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} =$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi\right) =$

$e^{i(\pi/4 + n\cdot 2\pi)}$

$z = \left(\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4 + n\cdot 2\pi)}\right)^{1/4} =$

$\left(2^{1/2}\right)^{1/4} e^{i\frac{1}{4}(\pi/4 + n\cdot 2\pi)} = 2^{1/8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{16} + n\frac{\pi}{2}\right)}$

[?] Kor mange løysingar skal vi ha?
↳ 4

$$z_0 = \underline{2^{1/8} e^{i\frac{\pi}{16}}}$$

$$z_1 = 2^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)} = \underline{2^{1/8} e^{i\frac{9\pi}{16}}}$$

$$z_2 = 2^{1/8} e^{i\left(\pi/16+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)} = \underline{2^{1/8} e^{i\,17\pi/16}}$$

$$z_3 = 2^{1/8} e^{i\left(\pi/16+3\frac{\pi}{2}\right)} = \underline{2^{1/8} e^{i\,25\pi/16}}$$

$$\left(z_4 = 2^{1/8} e^{i\left(\frac{\pi}{16}+4\frac{\pi}{2}\right)} = z_0\right)$$