DAFE1000, 12 januar

1 Info: Innlev. 1 lagt ut

- Har ikkje gått igjennom så mykje av det enda, men det er lov å prøve seg no alt.
- Innlev.: Papir eller pdf $\boxed{?}$

Anna $\boxed{?}$

- Funkar Canvas?
- — " — MATLAB?

Teaser:

- Skal prate om polynom, trigonometriske funksjonar og eksponentialfunksjonar – <u>repetisjon</u>
- Så: Forklare at trig. og eksp.-funksjonar eigentleg er det same – <u>ikkje</u> repetisjon

② Polynom

- Funksjonar på forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

der heiltalet n er endeleg.

Eksempel:

$a + bx$ – lineær funk. – 1.-gradspol.

$1 - x^3 + x^5 - x^7$ – 7.-gradspol.

5 – 0.-gradspol.

- Kan faktoriserast ved å finne nullpunkta:

Dersom eit polynom $p(x)$ er null for $x = x_0$, $p(x_0) = 0$, er $x - x_0$ ein faktor i polynomet.

Eksempel

Gitt: $p(x) = -x^3 + 4.5x^2 - 2x - 7.5$

a) Vis at $p(3) = 0$

b) Faktoriser $p(x)$

c) Skriv dette rasjonale uttrykket enklare: $\dfrac{-x^3 + 4.5x^2 - 2x - 7.5}{x^2 - 1}$

a) $p(3) = -3^3 + 4.5 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 7.5 = 0$

(Tar det i „eitt jafs“ i MATLAB eller på kalkulator)

b) Polynomdivisjon:

$$\begin{aligned}
&(-x^3 + 4.5x^2 - 2x - 7.5) : (x-3) = -x^2 + 1.5x + 2.5 \\
&\underline{-(-x^3 + 3x^2)} \\
&\qquad 1.5x^2 - 2x - 7.5 \\
&\qquad \underline{-(1.5x^2 - 4.5x)} \\
&\qquad\qquad 2.5x - 7.5 \\
&\qquad\qquad \underline{-(2.5x - 7.5)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

$p(x) = (-x^2 + 1.5x + 2.5)(x-3)$

Finn nullpkt. til den første faktoren:

$-x^2 + 1.5x + 2.5 = 0$

$$x = \frac{-1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2.5}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1.5 \mp 3.5}{2}$$

$$x = \frac{1.5 - 3.5}{2} = -1 \quad \text{eller} \quad x = \frac{1.5 + 3.5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

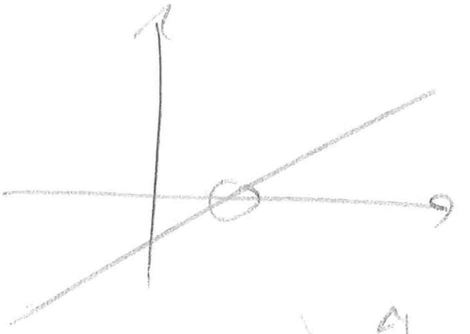
$-x^2 + 1.5x + 2.5 = -(x-(-1))(x-2.5) = -(x+1)(x-2.5)$

Altså: $\underline{p(x) = -(x+1)(x-2.5)(x-3)}$

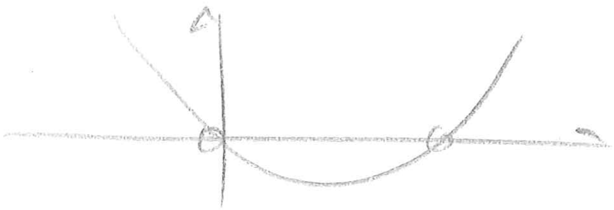
c) $$\frac{-x^3 + 4.5x^2 - 2x - 7.5}{x^2 - 1} = \frac{-\cancel{(x+1)}(x-2.5)(x-3)}{(x-1)\cancel{(x+1)}} =$$

$$= -\frac{(x-2.5)(x-3)}{x-1} = -\underline{\frac{x^2 - 5.5x + 7.5}{x-1}} \quad (\text{for } x \neq -1)$$

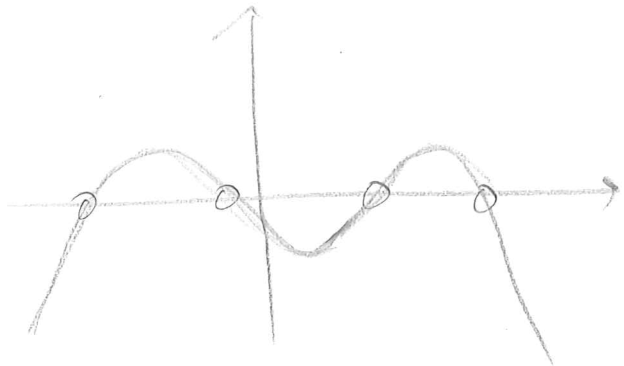
Typisk: n-te gradspolynom har n nullpkt.



1. grad



2. grad



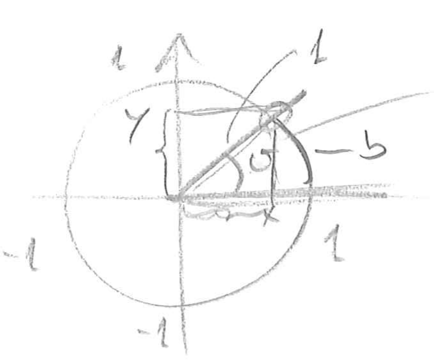
4. grad

③ Trigonometriske funksjonar

cos x og sin x

- Finst mange namn på kombinasjonar av desse. Den einaste interessante:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$



Rettvinkla trekant

$\sin v = \dfrac{y}{1} = y$

$\cos v = \dfrac{x}{1} = x$

v: Målt i radianar, $\frac{b}{1} = b$

$180° \sim \pi$ rad. etc.

Merk: – Vi definerar sin og cos ut frå einingssirkelen – ikkje rettvinkla trekantar.

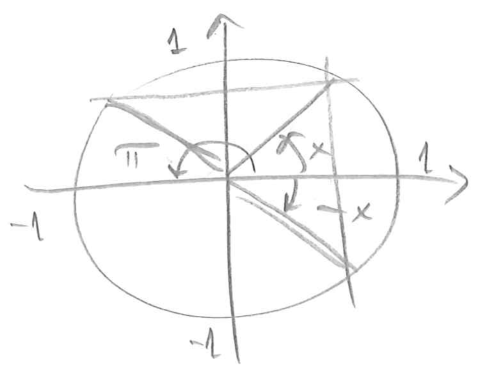
– Det tillèt vinklar v som ligg utan for 1. kvadrant (mellom 0 og $\pi/2$ – eller 0 og 90°).

– Korleis gir dette meining [?] (jmf. „360" eller „1080" på snøbrett)

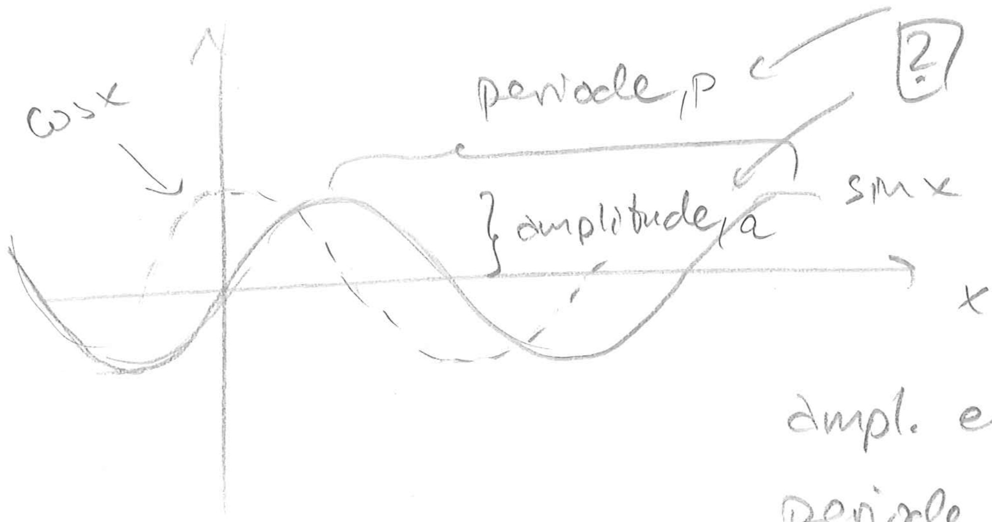
– Merk: Har også forteikn.

Av einingsirkelen ser vi:

- Både $\sin x$ og $\cos x$ ligg alltid mellom -1 og 1.
- Begge gjentar seg sjølv når x aukar med 2π (360°).
- $\cos x = \cos(-x)$
- $\sin x = \sin(\pi - x)$



Plottar sinus-funksjonen:

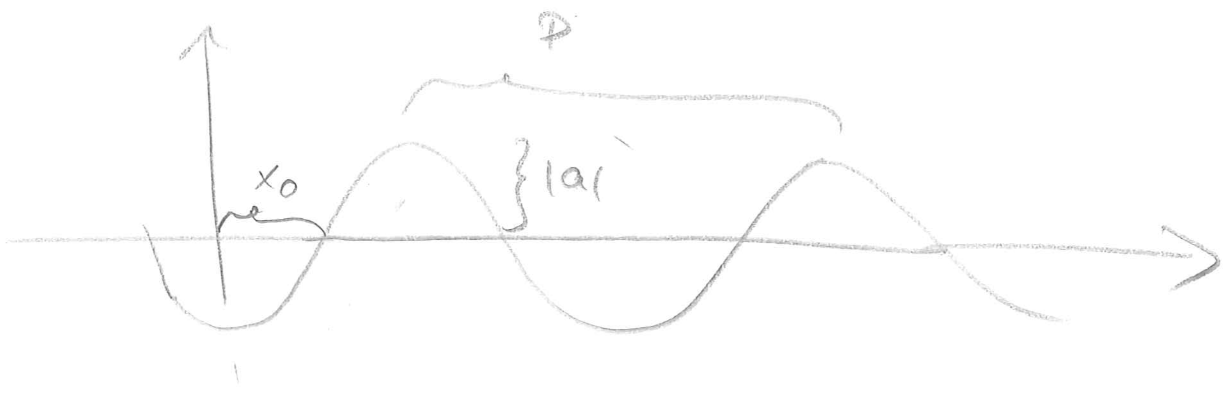


ampl. er 1

periode er 2π

Meir generell sinus-funksjon:

$$f(x) = a \sin(k(x - x_0))$$



x_0: Forskyvning

perioden p: må ha $kp = 2\pi$

$$f(x+p) = a \sin(k(x+p-x_0)) = a \sin(k(x-x_0) + \underbrace{kp}_{n \cdot 2\pi}) \stackrel{?}{=} f(x)$$

$p = \frac{2\pi}{k}$, k: Bølgetalet.

Eksempel

Bestem alle x mellom -2 og 2 som løyser likninga ($x \in (-2,2)$)

↖ Intervall

$$3 \sin(\pi(x-1)) = 2$$

→ Plotte, finne „circa-løysingar"

$$3 \sin(\pi(x-1)) = 2$$

Evt.: kalle $\pi(x-1)$ for u

$$\sin(\pi(x-1)) = \frac{2}{3}$$

„$\pi(x-1) = \arcsin \frac{2}{3}$" (evt. $\sin^{-1} \frac{3}{2}$)

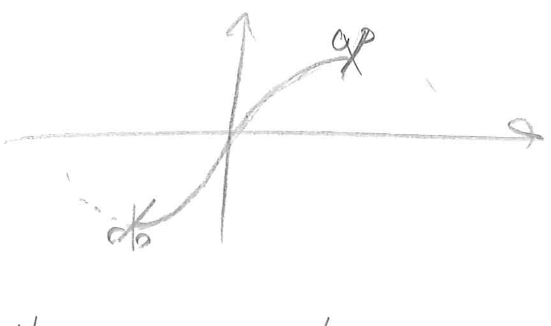
arcsin: Invers-funksjonen til sinus

Men: Er $\sin x$ èin-eintydig $\boxed{?}$

Har den ein invers $\boxed{?}$

Svar: Berre når x er avgrensa:

Når x ligg mellom $-\frac{\pi}{2}$ og $\frac{\pi}{2}$ er $\sin x$ èin-eintydig



– Har mang løysingar:

$\pi(x-1) = \arcsin \frac{2}{3} + n \cdot 2\pi$ der n er eit heiltal

Eller

$\pi(x-1) = \pi - \arcsin\frac{2}{3} + n \cdot 2\pi$

Altså:

$x-1 = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2n$ eller

$x-1 = 1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2n$

$x = 1 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2n$ eller

$x = 1 + 1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2n = 2 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2n$

$n = 0$:

$x = 1 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 0 = 1.7677$

eller

$x = 2 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 0 = 1.2323$

$n = 1$:

$\left.\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2\cdot 1 = 3.2323 \\ \text{eller} \\ x = 2 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} + 2\cdot 1 = 3.7677 \end{array}\right\}$ For stort

$n = -1$:

$x = 1 + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} - 2 = -0.7677$

eller

$x = 2 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{3} - 2 = -0.2323$

$n = -2$ gir løysingar mindre enn -2

(4) Eksponentialfunksjonar

Eksempel c) frå notat – verditap på bil

Frå onsdag, eksempel med bakteriar:

$B(t) = 5 \cdot 2^{t/3}$

Generell eksponentialfunk.:

$f(x) = k \cdot a^x \, , \quad a > 0$

Også vanleg form: $f(x) = k \cdot e^{bx}$

- Same form?

$a = e^{\ln a}$

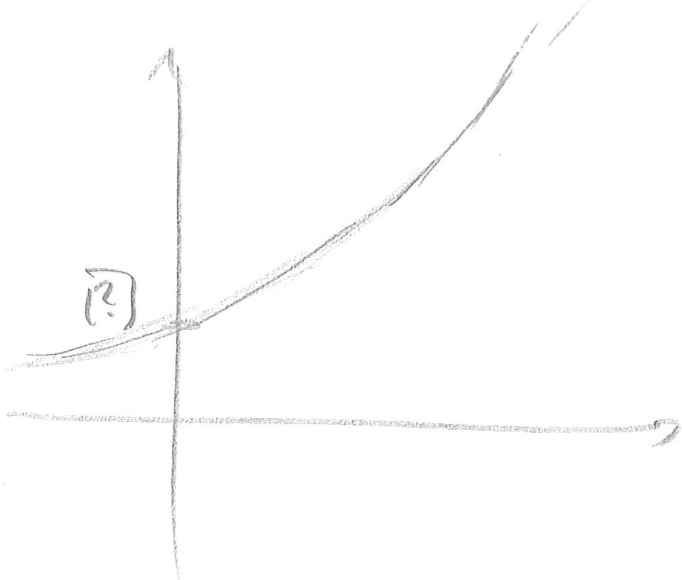
$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$ (potensregel)

Kva bestemmer om $f(x)$ veks eller avtar $\boxed{?}$

→ Om $a > 1$ eller ikkje

(jmf. eksempla over)

$f(x) = e^x$:



$D_f \overset{?}{=} \mathbb{R}$ (alle reelle tal)

$V_f \overset{?}{=} (0, \infty)$

(alle positive tal)

Er den ein-eintydig ?

→ Ja

$f^{-1}(x)$ finst – og heiter ... ?

↳ ln

- Plottar i MATLAB

Reglar

- Potens

$a^0 = 1$

$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$

$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$

$a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$

logaritmar

$\ln 1 = 0$

$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln a^x = x \ln a$

Eksempel: Deloppg. d) i notat

Hvis tid:

Løys desse likningane:

a) $5^3 \cdot 5^x = 7$

b) $e^x + e^{2x} = 7$

c) $\ln(x+3) - \ln(x-3) = 1$

---

a) $5^3 \cdot 5^x = 7$

$5^{x+3} = 7$

$(x+3)\ln 5 = \ln 7$

$x+3 = \frac{\ln 7}{\ln 5}$

$x = \frac{\ln 7}{\ln 5} - 3$

≈ -1.7909

evt.:

$5^x = \frac{7}{5^3}$

$x \ln 5 = \ln \frac{7}{5^3}$

$x = \frac{\ln \frac{7}{5^3}}{\ln 5}$

$= \frac{\ln 7 - \ln 5^3}{\ln 5}$

$= \frac{\ln 7 - 3\ln 5}{\ln 5}$

$= \frac{\ln 7}{\ln 5} - 3$

b)
$$e^x + e^{2x} = 7$$

$$e^{2x} + e^x - 7 = 0$$

$$(e^x)^2 + e^x - 7 = 0 \qquad (\text{evt. } e^x = u)$$

$$e^x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$e^x = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} < 0 \leftarrow \boxed{?} \text{ eller}$$

(e^x kan aldri bli negativt)

$$e^x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} = 2.1926$$

$$x = \ln e^x = \ln 2.1926 = \underline{0.7851}$$

c)
$$\ln(x+3) - \ln(x-3) = 1$$

$$\ln \frac{x+3}{x-3} = 1$$

$$e^{\ln \frac{x+3}{x-3}} = e^1$$

$$\frac{x+3}{x-3} = e$$

$$x + 3 = e(x-3)$$

$$x - e \cdot x = -3e - 3$$

$$x(e-1) = -3(e+1)$$

$$\underline{x = \frac{3(e+1)}{e-1}} \approx 6.4919$$

„Tecser"

Med $i = \sqrt{-1}$:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$