DAFE 1000

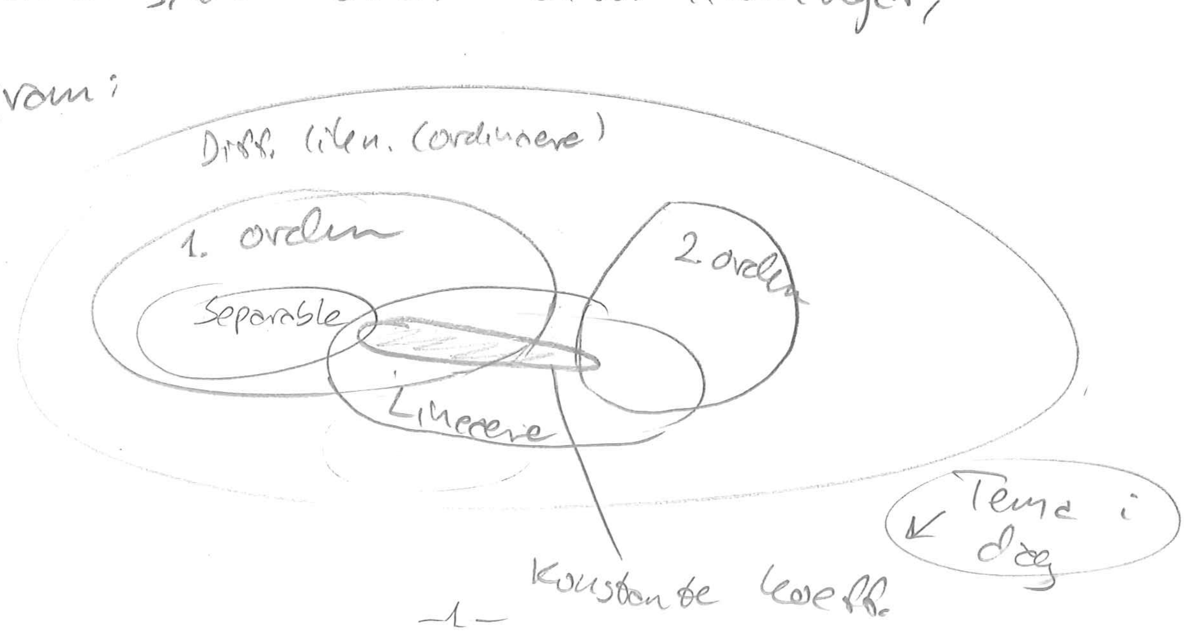
4/5 -18

(1) Info:

- Prøve-eksamen om ei veke, frå 8:30 til 11:30.
- Får hjelp om de vil.
- Den blir ikkje retta, men de får løysingsforslag.

(2) Repeterar og fullfører temperatur-eksempel frå mandag.

(3) Lita oversikt over diff.-likningar, Venndiagram:



Separabel: Kan skrivast som $f(y)\,dy = g(x)\,dx$

Lineær 1. orden: $y' + f(x)y = g(x)$

Lineær generelt:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots +$$
$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = b(x)$$

(For første orden: - deler på $a_1(x)$,
$f(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ og $g(x) = \frac{b(x)}{a_1(x)}$)

Dersom $b(x) = 0$, seier vi at likninga er <u>homogen</u>.

4 <u>Eksempel</u>

a) Finn alle løysingane av den <u>homogene</u> likninga $A\vec{x} = \vec{0}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Finn alle løysingane av den inhomogene likninga $A\vec{x} = \vec{b}$ der

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) – Her er det lite vits i å ha med høgresida, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}$, i totalmatrisa

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 8\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}-2\\-1\\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-1\\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-1\\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Med $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$: $x_1+7x_3=0$, $x_2-2x_3=0$
x_3 er fri

$x_1=-7x_3$ og $x_2=2x_3$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-7x_3\\2x_3\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix}$$

b) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & -3\\ 2 & 3 & 8 & -4\\ 2 & 4 & 6 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{l}-2\\-1\\ \end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\-1\ -1\\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 7 & -5\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Altså:

$x_1=-5-7x_3$
$x_2=2+2x_3$
x_3 er fri

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 - 7x_3 \\ 2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Løysinga frå a)}}$$

Èi bestemt løysing (av mange)

Generelt:
Løysinga av $A\vec{x} = \vec{b}$ kan alltid skrivast som $\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$
der $\vec{x}_h$ er den generelle løysinga av den homogene likninga $A\vec{x} = \vec{0}$ og $\vec{x}_p$ er ei partikulær løysing.

– Slik er det også med lineær differensiallikningar.

$\boxed{?}$ Er det opplagt? „Lineære likningssystem og lineære differensiallikningar er jo to heilt ulike ting!"

→ Nei, ikkje heilt, jmfr. oppg. 4 på innlevering nr. 3. Der brukte vi m.a. midtpunktformelen til å omformulere ei differentiallikning til eit lineært likningssystem.

Det var tilnærma, men i grensa $h \to 0$ / $N \to \infty$ blir det eksakt.

(5) Homogene, lineære differensiallikningar av 1. og 2. orden med konstante koeffisientar. (12.4)

- Skal løyse differensiallikningar av typen

$$a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1.\ \text{orden})$$

og

$$a_2 y'' + a_1 y' + a y = 0 \qquad (2.\ \text{orden})$$

a-ane er her konstantar (ikkje generelle funksjonar).

$a_1 y' + a_2 y = 0$ kan løysast både som ei separabel diff.-likning og med integrerande faktor.

Her: Ein tredje metode (også den siste): Vi „tippar" på ei eksponentiell løysing.

Eksempel

Finn dei generelle løysingane av desse homogene differensiallikningane:

a) $5y' - 3y = 0$

b) $y'' + 2y' - 15y = 0$

c) $y'' + 4y' + 13y = 0$

---

a) „Tippar" at $y = e^{rx}$ er løysinga — berre vi finn rett r:

$y' = re^{rx}$

Set inn:

$5 \cdot re^{rx} - 3 \cdot e^{rx} = 0$

$e^{rx}(5r - 3) = 0$ $\quad$ ($e^{rx} \neq 0$ - alltid)

$5r - 3 = 0$

$r = \frac{3}{5}$

$y = e^{\frac{3}{5}x}$

– Har funne èi løysing. Men: $C e^{\frac{3}{5}x}$ er også løysing:

$$\left(C e^{\frac{3}{5}x}\right)' - 3 \cdot C e^{\frac{3}{5}x} = C\left(e^{\frac{3}{5}x} - 3e^{\frac{3}{5}x}\right) =$$

$$C \cdot 0 = 0$$

Altså: $y = C e^{\frac{3}{5}x}$

Som separabel:

$$5\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

$$5\,dy = 3y\,dx$$

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{3}{5}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{3}{5}\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{3}{5}x + C_1$$

$$y = \pm e^{C_1 + \frac{3}{5}x} = C e^{\frac{3}{5}x} \quad (C = \pm e^{C_1})$$

Med integrerande faktor:

$$5y' - 3y = 0$$

$$y' - \frac{3}{5}y = 0$$

Int. faktor: $e^{-\frac{3}{5}x}$

$$\left(e^{-\frac{3}{5}x} y\right)' = e^{-\frac{3}{5}x} \cdot 0 = 0$$

$$e^{-\frac{3}{5}x} y = \int 0\,dx = C$$

$$y = e^{+\frac{3}{5}x} \cdot C$$

b) Igjen: $y = e^{rx}$

$y' = re^{rx}$

$y'' = r^2 e^{rx}$

Set inn:

$r^2 e^{rx} + 2re^{rx} - 15e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + 2r - 15) = 0$

$r^2 + 2r - 15 = 0$

$r = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4$

$r_1 = -1 - 4 = -5$ og $r_2 = -1 + 4 = 3$

To løysingar: $y_1 = e^{-5x}$ og $y_2 = e^{3x}$

Også løysing: $y = Ay_1 + By_2$

Viser det:

- Veit at $y_1'' + 2y_1' - 15y_1 = 0$ og at
$y_2'' + 2y_2' - 15y_2 = 0$

$(Ay_1 + By_2)'' + 2(Ay_1 + By_2)' - 15(Ay_1 + By_2) =$

$A(y_1'' + 2y_1' - 15y_1) + B(y_2'' + 2y_2' - 15y_2) =$

$A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$

Generell løysing:

$\underline{y = Ae^{-5x} + Be^{3x}}$

c) Som før: $y = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

$r^2 e^{rx} + 4re^{rx} + 13e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + 4r + 13) = 0$

$r^2 + 4r + 13 = 0$ (Karakteristisk likning)

$r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-36}}{2} =$

$\frac{-4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = -2 \pm 3i$

$r_1 = -2 - 3i$ og $r_2 = -2 + 3i$

Løysing: $y = C e^{(-2-3i)x} + D e^{(-2+3i)x}$

- Rett, men ... vi vil jo helst ha ein reell y.

Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$

$e^{(-2-3i)x} = e^{-2x} \cdot e^{-3ix} =$

$e^{-2x}(\cos(-3x) + i \sin(-3x)) =$

$e^{-2x}(\cos(3x) - i\sin(3x))$

$e^{(-2+3i)x} = e^{-2x}(\cos(3x) + i\sin(3x))$

Altså:

$y = Ce^{-2x}(\cos(3x) - i\sin(3x)) +$
$De^{-2x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) =$

$$e^{-2x}\left((C'+D)\cos(3x) + (-iC'+iD)\sin(3x)\right)$$

– Vel $A = C' + D$ og $B = -iC' + iD$

Generell løysing:

$$y(x) = e^{-2x}\left(A\cos(3x) + B\sin(3x)\right)$$

Ser: y er reell dersom A og B er det. (Tilsvarar at $C' = \overline{D}$.)

Oppsummert

Differensiallikninga

$$ay'' + by' + cy = 0$$

har karakteristisk likning

$$ar^2 + br + c = 0.$$

a) Med to ulike reelle løysingar r_1 og r_2:

$$y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$$

b) Med $r = a \pm ib$:

$$y(x) = e^{ax}\left(A\cos(bx) + B\sin(bx)\right)$$

c) Dersom likninga berre har èi (reell) rot r:

$$y(x) = e^{rx}(A + Bx)$$

(6) Inhomogene, lineære differensiallikningar av 1. og 2. orden med konstante koeffisientar. (12.4)

$$ay' + by = g(x)$$ eller

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

– „Tippar" på partikulære løysingar av same type som $g(x)$.

Eksempel

Finn dei generelle løysingane av desse inhomogene differensiallikningane

a) $5y' - 3y = x$

b) $y'' + 2y' - 15y = \sin(2x)$

c) $y'' + 4y' + 13y = e^x$

Veit: $y = y_h + y_p$ der y_p er èi (partikulær) løysing og y_h er den generelle løysinga av den tilsvarande homogene likninga.

Alle y_h-ane fann vi i det førre [forige] eksempelet.

a) $y_h = C_1 e^{\frac{3}{5}x}$

Tippar at vi kan finne ei løysing som er eit 1.-grads-polynom:

$y = ax + b \Rightarrow y' = a$

Set inn – for å bestemme a og b:

$5 \cdot a - 3(ax+b) = x$

$-3ax + 5a - b = 1x + 0$

– Skal stemme for <u>alle</u> x:

$-3a = 1$ og $5a - b = 0$

$a = -\frac{1}{3}$ og $b = -5a = -5 \cdot (-\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$

$y_p = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

Generell løysing:

$y = y_h + y_p = C_1 e^{\frac{3}{5}x} - \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

b) Tippar y_p er ein trigonometrisk funksjon med koeffisient 2:

$y = a\cos(2x) + b\sin(2x)$

$y' = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$

$y'' = -4a \cos(2x) - 4b \sin(2x)$

Set inn:

$-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x) + 2(-2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)) -$
$15(a\cos(2x) + b\sin(2x)) = \sin(2x)$

$\cos(2x)(-4a + 4b - 15a) +$
$\sin(2x)(-4b - 4a - 15b) = \sin(2x)$

$(-19a + 4b)\cos(2x) + (-4a - 19b)\sin(2x) =$
$0 \cdot \cos(2x) + 1\sin(2x)$

- Skal stemme for <u>alle</u> verdiar av x:

$-19a + 4b = 0$

$-4a - 19b = 1$

$$\begin{pmatrix} -19 & 4 \\ -4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{19^2 + 4^2} \begin{pmatrix} -19 & -4 \\ 4 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{377} \begin{pmatrix} -4 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$y_p = -\frac{4}{377}\cos(2x) - \frac{19}{377}\sin(2x)$

Frå før: $y_h = Ae^{-5x} + Be^{3x}$

Generell løysing:

$y(x) = y_h + y_p = Ae^{-5x} + Be^{3x} - \frac{4}{377}\cos(2x) - \frac{19}{377}\sin(2x)$

c) Har: $y_h = e^{-2x}(A\cos(3x) + B\sin(3x))$

„Tippar" $y_p = ae^x$

$y_p' = y_p'' = y_p = ae^x$

$ae^x + 4ae^x + 13ae^x = e^x$

$(a + 4a + 13a)e^x = e^x$

$18a = 1, \quad a = \frac{1}{18}$

$y_p = \frac{1}{18}e^x$

Generell løysing:

$y = y_h + y_p = e^{-2x}(A\cos(3x) + B\sin(3x)) + \frac{1}{18}e^x$