DAFE 1000 30/4

① -Legg opp til prøveeksamen, 3 timar, på skulen den 11/5.

-Kjem tilbake med tid og stad.

-Vil uansett legge ut sett med eksempel på aktuelle eksamens-oppgåver.

② Repetere eksempel frå sist:

Oppg. 8 frå eksamen august 2014

- Vise at løysinga stemmer
- Så: Vise korleis vi kan finne ho.

Generelt:

Ei lineær differensiallikning av 1. orden kan skrivast slik:

$$y' + f(x)y = g(x).$$

- Kan finne den generelle løysinga ved å bruke såkalla integrerande faktor: $e^{F(x)}$ der $F'(x) = f(x)$:

$$e^{F(x)}(y' + f(x)y) = e^{F(x)}g(x)$$

Poeng: Venstresida kan skrivast som $(e^{F(x)}y)'$:

$$(e^{F(x)}y)' = (e^F)'y + e^F \cdot y' = e^F y' + e^F \cdot F'(x)y = e^F(y' + f(x)y)$$

Altså:

$$(e^{F(x)}y)' = e^{F(x)}g(x)$$

$$\boxed{e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\,dx}$$

$\boxed{?}$ Når er denne metoden nyttig?

↳ Når $f(x)$ og $e^{F(x)} g(x)$ let seg anti-derivere (Slett ikkje alltid slik.)

Når kan vi bruke Eulers metode?

↳ „alltid"

Eksempel

Finn den generelle løysinga av desse lineære differensiallikningane

a) $y' - 2xy = x$

b) $y' + \frac{1}{x} y = 3\cos(2x)$

$y' + f(x) y = g(x)$

med $f(x) = -2x$ og $g(x) = x$

Integrerande faktor: $e^{F(x)}$ med $F(x) = -x^2$

$$(e^{-x^2} y)' = e^{-x^2} \cdot x$$

$$y = \int x e^{-x^2} dx \overset{u=-x^2}{=} \int x e^{u} \frac{1}{-2x} du = -\frac{1}{2} \int e^u du$$

$$e^{-x^2} y = -\frac{1}{2} e^u + C' = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C'$$

$$y = e^{+x^2}\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C'\right) =$$

$$C' e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\underline{y(x) = C' e^{x^2} - \frac{1}{2}}$$

Legg merke til: $y = -\frac{1}{2}$ er <u>ei</u> løysing

og $y_u = C' e^{x^2}$ er alle løysingar av

$y' - 2xy = \underline{0}$ (Homogen likning)

Sjekk: $(C' e^{x^2})' - 2x C' e^{x^2} =$

$$C' e^{x^2} \cdot 2x - 2x C' e^{x^2} = 0$$

b) $y' + \frac{1}{x} y = 3\cos(2x)$

Integrerande faktor: e^F med $F' = \frac{1}{x}$.

Vel $F = \ln x$ $(x > 0)$

$$e^F = e^{\ln x} = x$$

$$x \cdot \left(y' + \frac{1}{x} y\right) = x \cdot 3\cos(2x)$$

$$(xy)' = 3x\cos(2x)$$

$$xy = \int 3x\cos(2x)\,dx \overset{\text{Delvis}}{=} 3x \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) - \int 3 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

$$xy = \frac{3}{2} x \sin(2x) - \frac{3}{2} \int \sin(2x)\,dx =$$

$$\frac{3}{2}\left(x \sin(2x) - \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + c' =\right.$$

$$\frac{3}{2} x \sin(2x) + \frac{3}{4}\cos(2x) + c'$$

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{3}{2} x \sin(2x) + \frac{3}{4}\cos(2x) + c'\right)$$

$$= \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}\,\frac{\cos(2x)}{x} + \frac{c'}{x}$$

Igjen: $\frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}\frac{\cos(2x)}{x}$ er èi

løysing og c'/x løyser $y' + \frac{1}{x}y = 0$.

Sidan $\left(\frac{c'}{x}\right)' + \frac{1}{x}\frac{c'}{x} = c' \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x}\cdot\frac{c'}{x} =$

$$-\frac{c'}{x^2} + \frac{c'}{x^2} = \underline{0}$$

[?] Er nokon av desse differensiallikningane separable?

→ a) Ja, b): Nei

a) Revisited:

$$y' - 2xy = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x + 2xy = x(1+2y)$$

$$\frac{1}{2y+1}\,dy = x\,dx$$

$$\int \frac{1}{2y+1}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \frac{1}{2}x^2 + C'$$

$$\ln|2y+1| = x^2 + C''$$

$$|2y+1| = e^{x^2+C''}$$

$$2y+1 = \pm e^{C''} \cdot e^{x^2} = C''' e^{x^2} \quad (C''' = \pm e^{C''})$$

$$2y = C''' e^{x^2} - 1$$

$$\boxed{y = C e^{x^2} - \frac{1}{2}} \quad (C = C''')$$

(Same som i stad.)

Poeng: Ei differensiallikning kan godt vere <u>både</u> separabel og lineær.

Eksempel (Frå intro-veka)

Temperaturen i eit rom med omn:

$$T'(t) = -k_1(T - T_{ute}) + k_2 \cdot P$$

T_{ute}: Utetemp.
P: Effekten i omn
t: Timar etter midnatt.
k_1, k_2: Konstantar, $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.008$

a) Verkar modellen rimeleg? Om $T(0) = 19$, $T_{ute}(0) = 5$ og $P = 0$, kor fort endrar T seg ved midnatt? Enn om $P = 300$?

b) Vi tenkjer oss no at $T_{ute} = 5$ (i °C) heile tida. (Og at $k_1 = 0.3$ og $k_2 = 0.008$.) Startkrav: $T(0) = 19$. Omnen er av, $P = 0$. Finn $T(t)$.

c) Vi tenkjer oss at vi vil ha temp. 18 °C klokka 12 neste dag. Når må vi då skru på omnen, som har maksimal effekt 600 W.?

d) Vi brukar no ein litt meir realistisk modell for T_{ute}:

$T_{ute} = 5 - \cos\left(\frac{\pi}{15} t\right)$, $D_{T_{ute}} = [0, 36]$.

Løys startverdiproblemet med denne.
P=0 framleis.

e) Til slutt brukar vi ein modell basert på loggførte data: TempFunk.m
Korleis kan vi no bestemme T(t)?
Gjer dette. (Framleis: P=0.)

f) Omnen kan regulerast. Bestem P(t) slik at T(t) blir verande på 18°C når den har nådd denne temperaturen.

Kor mykje energi har omnen brukt i løpet av desse 36 timane?
Kva er den maksimale temperaturforskjellen omnen kan kompensere for?

g) Gjer om igjen oppg. c) med den nye modellen for Tute. Altså: Bestem tidspunktet vi må sette omnen på 600W for å ha 18°C klokka 12:00 neste dag – med Tute(t) gitt med fila TempFunk.m

$-k_1(T-T_{ute})$: Varmetap, negativ når $T > T_{ute}$
- Tenker oss at farten temperaturen
fell med, $-T'(t)$, er proporsjonal med
temperatur-differansen.
$k_2 P$: Positivt bidrag til $T'(t)$. Kompenserar/
reduserar varmetap – avhengig av kor
stor P er.

For $P=0$:

$$T'(0) = -k_1(T(0)-5)+0 =$$

$$-0.3 \cdot (19-5) = -4.2$$

Altså: Temperaturen avtar med 4.2 °C/h.

For $P=300$:

$$T'(0) = -k_1(T(0)-5)+k_2 \cdot P =$$

$$-0.3(19-5)+0.008 \cdot 300 = -1.8$$

- Avtar med 1.8 °C/h.

b) $P=0$; $T_{ute}=5$

$T'(t) = -k_1(T-5)$

Separabel:

$$\frac{dT}{dt} = -k_1(T-5)$$

$$\frac{1}{T-5}\,dt = -k_1 dt$$

$$\int \frac{1}{T-5}\,dt = \int -k_1 dt$$

$$\ln|T-5| = -k_1 t + C_1$$

$$|T-5| = e^{-k_1 t + C_1} = e^{C_1}\cdot e^{-k_1 t}$$

$$T-5 = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{C}\cdot e^{-k_1 t} = C e^{-k_1 t}$$

$$T = 5 + C e^{-k_1 t}$$

Startkrav: $T(0) = 19$

$$5 + C e^{-k_1 \cdot 0} = 19, \quad C = 14$$

$T(t) = 5 + 14 e^{-k_1 t}$, $k_1 = 0.3$

c) For tidspunkt t_1: Skrur ommen på fullt; $P = 600$.

For $t < t_1$: $T(t) = 5 + 14 e^{-k_1 t}$.

For $t \geq t_1$:

$$T' = -0.3(T-5) + 0.006 \cdot 600$$

$$= -0.3T + 6.3 = -0.3(T-21)$$

På same vis som i stad:

$$T(t) = 21 + C_2 e^{-0.3t}$$

Altså:

$$T(t) = \begin{cases} 5 + 14e^{-0.3t}, & t < t_1 \\ 21 + C_2 e^{-0.3t}, & t \geq t_1 \end{cases}$$

Skal ha: $T(36) = 18$

$$21 + C_2 e^{-0.3 \cdot 36} = 18$$

$$C_2 = \frac{18-21}{e^{-0.3 \cdot 36}} \approx -1.4706 \cdot 10^5$$

$\boxed{?}$ Men korleis bestemmer vi t_1?

↳ Kontinuitet

$$\lim_{t \to t_1} T(t) = T(t_1)$$

$$\lim_{t \to t_1^-} T(t) = 5 + 14e^{-0.3 \cdot t_1}$$

$$T(t_1) = 21 + C_2 \cdot e^{-0.3t_1}$$

$$5 + 14 e^{-0.3 t_1} = 21 + C_2 e^{-0.3 t_1}$$

$$(C_2 - 14) e^{-0.3 t_1} = 5 - 21 = -16$$

$$-0.3 t_1 = \ln\left(\frac{16}{14 - C_2}\right)$$

$$t_1 = \frac{\ln \frac{16}{14 - C_2}}{-0.3} = 30.4204$$

$0.4204 \cdot 60 = 25.2$, $\quad 30 - 24 = 6$

- Vi må sette omnen på klokka 06:25 natta før.

(Alternativt kan vi sette opp uttrykket for $t > t_1$ direkte slik at det blir kont. for $t = t_1$ og så bestemme t_1 ved slutt-kravet:

For $t \geq t_1$:

$$T(t) = \ldots = 21 + 14 e^{-0.3t} - 16 e^{-0.3(t - t_1)}$$

Krav: $T(36) = 18$

$$21 + 14 e^{-0.3 \cdot 36} - 16 e^{-0.3(36 - t_1)} = 18$$

$\vdots$

$t = 30.4204$)

- Om vi hadde rekna at $T = 5$ ved t_1, hadde vi fått rimeleg rett svar.

d) No: $T_{ute}(t) = 5 - \cos(\frac{\pi}{15}t)$

$$T' = -k_1(T - (5 - \cos(\tfrac{\pi}{15}t))$$

$$T' + k_1 T = k_1(5 - \cos(\tfrac{\pi}{15}t))$$

- Lineær diff.-likn.

Integrerende faktor: $e^{k_1 t}$

$$(e^{k_1 t}T)' = e^{k_1 t} \cdot k_1(5 - \cos(\tfrac{\pi}{15}t))$$

$$e^{k_1 t}T = k_1 \int e^{k_1 t}(5 - \cos(\tfrac{\pi}{15}t))dt$$

Delvis integrasjon:

$$\int \cos(ax) e^{bx} dx = \cos(ax) \cdot \frac{1}{b} e^{bx} - \int -a\sin(ax)\frac{1}{b}e^{bx}dx$$

$$= \frac{1}{b}\cos(ax)e^{bx} + \frac{a}{b}\int \sin(ax) e^{bx} dx \overset{\text{Delvis}}{=}$$

$$\frac{1}{b}\cos(ax)e^{bx} + \frac{a}{b}\left(\sin(ax)\cdot\frac{1}{b}e^{bx} - \int a\cos(ax)\frac{1}{b}e^{bx}dx\right)$$

$$= \frac{1}{b}\cos(ax)e^{bx} + \frac{a}{b^2}\sin(ax)e^{bx} - \frac{a^2}{b^2}\int\cos(ax)e^{bx}dx$$

Likning:

$$\int \cos(ax)e^{bx}dx + \frac{a^2}{b^2}\int\cos(ax)e^{bx}dx =$$
$$\frac{1}{b}\cos(ax)e^{bx} + \frac{a}{b^2}\sin(ax)e^{bx}$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int\cos(ax)e^{bx}dx =$$
$$\frac{1}{b}\cos(ax)e^{bx} + \frac{a}{b^2}\sin(ax)e^{bx} + C_1$$

$$\int\cos(ax)e^{bx}dx = \frac{e^{bx}\left(\frac{1}{b}\cos(ax) + \frac{a}{b^2}\sin(ax)\right)}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + C =$$

$$\frac{a\sin(ax)+b\cos(ax)}{a^2+b^2}\cdot e^{bx}+C'$$

Her: $a=\frac{\pi}{15}$, $b=k_1=0.3$

Vi får:

$$e^{k_1t}T=\cancel{k_1}\cdot 5\cdot\frac{1}{\cancel{k_1}}e^{k_1t}-k_1\cdot\frac{a\sin(at)+k_1\cos(at)}{a^2+k_1^2}\cdot e^{k_1t}$$
$$+C'$$

$$T=5-\frac{k_1}{a^2+k_1^2}(a\sin(at)+k_1\cos(at))+C'e^{-k_1t}$$

Startkrav: $T(0)=19$

$$5-\frac{k_1}{\left(\frac{\pi}{15}\right)^2+k_1^2}(\sin 0+k_1\cos 0)+C'e^0=19$$

$$5-\frac{k_1^2}{(\;)^2+k_1^2}+C'=19,\quad C'=19-5+\frac{k_1^2}{(\;)^2+k_1^2}=\underline{14.6723}$$

$$T(t)=5-\frac{k_1}{a^2+k_1^2}(a\sin(at)+k_1\cos(at))+14.6723\cdot e^{-k_1t},$$
$$a=\frac{\pi}{15},\ k_1=0.3$$

- Kanskje idee greit å gjøre numerisk?

e) Eulers metode-implementering:

EulersMetTemp.m (Canvas)

f) Vil ha $T(t) = 18$ - heile tida.

Må ha at $T'(t) = 0$ når $T(t) = 18$

$T' = 0$:

$$0 = -k_1(18 - T_{ute}(t)) + k_2 \cdot P(t)$$

$$P(t) = \frac{k_1}{k_2}(18 - T_{ute}(t))$$

↳ plotte.

Forbruk: $\Delta Q = P(t) \cdot \Delta t$

$$Q \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{N} P(t_i)\Delta t_i$$

↑

Riemann-sum

$\Delta t_i \to 0$:

$Q = \int_{t_2}^{36} P(t)\,dt$, t_2: Der vi slår på

Her er P ein tabell, brukar trapes-integrasjon. Dette kan vi gjere inni implementeringa.

Svar: $Q = 1.7614 \cdot 10^4$ W·h $\approx$ 17.6 kWh

Har: $P = \frac{k_1}{k_2} \underbrace{(18 - T_{ute})}_{\Delta T}$

Skal også ha: $P \leq 600$

$$\frac{k_1}{k_2} \Delta T \leq 600$$

$$\Delta T \leq \frac{k_2}{k_1} \cdot 600 = \frac{0.008}{0.3} \cdot 600 = \underline{16}$$

Om $T - T_{ute} > 16$, vil ikkje omnen klare å halde oppe temperaturen.

9) Ny implementering: Tend:

- Reknar ut $T(36)$ der omnen blir skrudd på ved t_1. Denne blir estimert ved Eulers metode, som tar N som input. Til slutt trekker vi frå 18 - slik at den gir noko positivt om t_1 er for låg og negativt om t_1 er for høg.

Med Tend.m som ei funksjonsfil med t_1 (og N) som input, kan vi bruke <u>halveringsmetoden</u>.

- NB: Prøving og feiling er også OK!

Finn: $t_1 = 25$ er for tidleg og

$t_1 = 35$ er for seint;

- brukar desse for a og b.
- Gjentar for stadig høgare N-verdiar.

Implementering: HalveringsMetTemp.

Svar: $t_1 = 29.83$ $(N \sim 10000)$

- Plottar for å sjekke.

-