DAFE 1000 27/4

① Innlev. 4:

- Frist i dag.
- Kan droppe 3 c), d) (og f, g).
- Det andre skal gjerast!

Tips til 2c: Lag funksjonsfil til erf(x).

Tips til 3a: Rotèr rundt x-aksen!

Tips: Be om hjelp!

② Gå gjennom oppg. 1 frå oppgåvesettet „Oppgåver til veke 17".
(ref. til Oppg. 12.6.3 i læreboka.)

(3) Rep.:

Eulers metode

Gitt startverdiproblem:

$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$

$y(x_n) \approx y_n$ der

$y_{n+1} = y_n + F(x,y) \cdot h$ og $x_n = x_0 + n \cdot h$

Krav: h er <u>liten nok</u>.

- Direkte bruk av lineær tilnærming $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ for $x \approx a$, igjen og igjen
- <u>Må</u> sjekke at svaret er rimelig uavhengig av h.

<u>Eksempel</u>

For dette startverdiproblemet:

$y' = x + \sqrt{y}, \quad y'(-2) = 1{,}2,$

Finn ei konvergert numerisk løysing og plott denne for $x \in [-2, 2]$

→ MATLAB-skript: EulersMet.m

NB: Gjenta med „hold on" til dess grafane ligg oppå kvarandre.

Eksempel

a) Vis at denne funksjonen:

$$y = e^{\arctan x}$$

er ei løysing (løysinga) av dette startverdiproblemet:

$$y' = \frac{y}{x^2+1}, \quad y(0) = 1.$$

b) Kontrollèr at implementeringa frå i stad faktisk nærmar seg denne løysinga når steglengda avtar.

Etterpå:

Eulers metode er god på den måten at han gir innsikt i kva ei diff.-likning er. Men som numeriske metode er den nesten heilt ubrukeleg. Feilen går som h^2. Og verre: Feilen vil ofte samle seg opp bli vilkårleg stor.

Ei lita justering gir ein langt betre metode.

Eulers midtpunktmetode:

$y(x_n) \approx y_n$ der

$y_{n+1} = y_n + F(\hat{x}_n, \hat{y}_n)h$ der

$\hat{x}_n = x_n + h/2$ og

$\hat{y}_n = y_n + F(x_n, y_n)h/2.$

Som før er $x_n = x_0 + nh$ og

$y(x_0) = x_0$ gitt.

- Implementere denne og vise at den er betre for eksempelet frå i stad.

Feilen går no som h^2.
Forskjellen tilsvarar forskjellen mellom framover- og midtpunktsformelen for numerisk derivasjon.

④ Analytisk løysing av 1. ordens diff.-likningar

- Skal lære å løyse to klassar av 1. ordens diff.-likningar:

  a) Separable: $f(y)dy = g(x)dx$

  b) Lineære: $y' + f(x)y = g(x)$

Enklast: $y' = f(x)$

løysing: $y = \int f(x)dx$

„Eksempel"

a) Finn alle løysingar av differensial-likninga $y' = \frac{y}{1+x^2}$.

b) Finn den løysinga som oppfyller startkravet (initialkravet) $y(0)=1$.

- Har sett likninga og løysinga før.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2}$

- gongar opp med dx (ja, det er lov!)

$dy = \frac{y}{1+x^2}\,dx$

- deler med på y:

$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{1+x^2}\,dx$ („$f(y)dy = g(x)dx$")

Gjer det same på begge sider:

$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

„C-merke"

$\ln|y| + \cancel{C_1} = \arctan x + C'$

$|y| = e^{\arctan x + C'} = e^{\arctan x} \cdot e^{C'}$

$$y = \underbrace{\pm e^{C'}}_{C'} e^{\arctan x}$$

$$y = C' e^{\arctan x}$$

$\boxed{?}$ Kor mange løysingar har vi funne?

↳ uendeleg; C' kan vere kva som helst

Vi kallar dette <u>den generelle løysinga</u> av differensiallikninga.

b) Her skal vi finne den spesielle løysinga som oppfyller $y(0)=1$. Vi må altså bestemme C'.

$$y(0) = 1$$

$$C' \cdot e^{\arctan 0} = 1$$

$$C' e^{0} = 1, \quad \underline{C' = 1}$$

$$\underline{y(x) = e^{\arctan x}}$$

Eksempel: Oppg. 8 frå eksamen gitt i august 2014

a) Positiv inntening per månad:

5% av $K(t)$, der K er kapitalen.

Utgifter: $100+5t$ (målt i kroner)

Altså: Farten kapitalen aukar med, $K'(t)$, har to bidrag – eitt positivt og eitt negativt,

$$K'(t) = +0.05K - (100+5t)$$ → Retnings-felt?

Løysing: $K(t) = 4000 + 100t + C e^{0.05t}$

Sjekker:

$$K'(t) = 0 + 100 + C e^{0.05t} \cdot 0.05 = 100 + 0.05 C e^{0.05t}$$

$$0.05K - (100+5t) =$$

$$0.05(4000 + 100t + C e^{0.05t}) - 100 - 5t =$$

$$200 + \cancel{5t} + 0.05 C e^{0.05t} - 100 - \cancel{5t} =$$

$$100 + 0.05 C e^{0.05t} = K'(t)$$

– Det stemmer!

b) $K(t) = \underbrace{4000 + 100t}_{\text{Lineær}} + C e^{0.05t}$

eksponentiell

[?] Kva dominerar for stor t?

Så dersom K skal bli stor...

... må C vere positiv.

Krav: $C > 0$

Kva må $K(0)$ då vere?

(jmf. retningsfelt)

$K(0) = 4000 + 0 + C e^0 = 4000 + C$

$C > 0 \Rightarrow K(0) > 4000$

Dei treng minst 4000 kkr – altså

minst 4 millionar kroner.

↳ Plotte løysinga?

Men korleis kan vi løyse likninga?

↳ Integrerande faktor (mandag)

Eksempel: Oppg. 3 frå „Oppgåver veke 17"

- Fonske fritt frå lærde-forslaget

Gitt: $h'(t) = -4{,}23 \cdot 10^{-3}\sqrt{h}$ (sylinder)

t: sekund

h: Meter

Eksempel

Finn den generelle løysinga av denne separable differentiallikninga:

$$yy' = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$y\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, \quad y \cdot \sqrt{y}\,dy = \sqrt{x}\,dx$$

$$\int y^{3/2}\,dy = \int x^{1/2}\,dx$$

$$\frac{2}{5}y^{5/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} + C'$$

$$y = \left(\frac{5}{3}x^{3/2} + C'\right)^{2/5}$$