# DAFE 1000 23/4

(1) Minne om innlevering

– Går gjennom resten av det vi treng i dag.

(2) Dette er ein funksjon:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt.$$

[?] Kva er det ein funksjon av? t?

→ Nei, av x.

Dersom $F'(t) = e^{-t^2}$, er

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x) - F(0)$$

Merk: F(x) „finst," vi har berre ikkje noko (elementært) uttrykk for funksjonen.

[?] Kva er forskjellen på $\int_0^x e^{-t^2} dt$ og $\int e^{-x^2} dx$ ?

Begge er anti-deriverte:

$$\int_0^x e^{-t^2}dx = F(x) - F(0)$$

$$\int e^{-x^2}dx = F(x) + C$$

Den øverste er slik at vi får null for $x=0$. Den nederste er den generelle anti-deriverte.

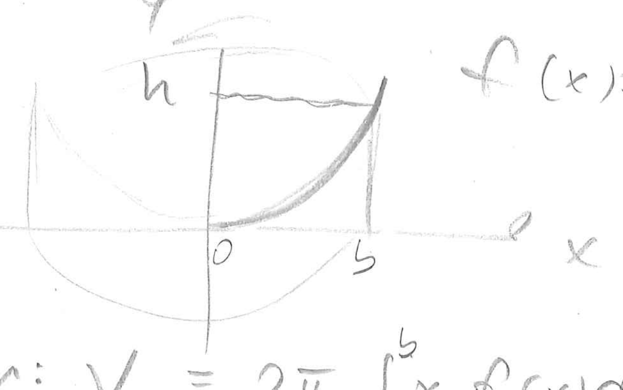
Uansett:

$$\frac{d}{dx}\int e^{-x^2}dx = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt = F'(x) = e^{-x^2}$$

(jmf. Oppg. 2 i innleveringa.)

③ <u>Eksempel</u>: Oppg. 4 frå eksamen gitt i mai 2014.

a)




$f(x) = x^2$

Volum: $V_y = 2\pi \int_0^b x f(x) dx$

$f(b) = h, \quad b^2 = h, \quad b = \sqrt{h}$

Men: Dette er volumet <u>under</u> grafen

Vi skal ha det over.

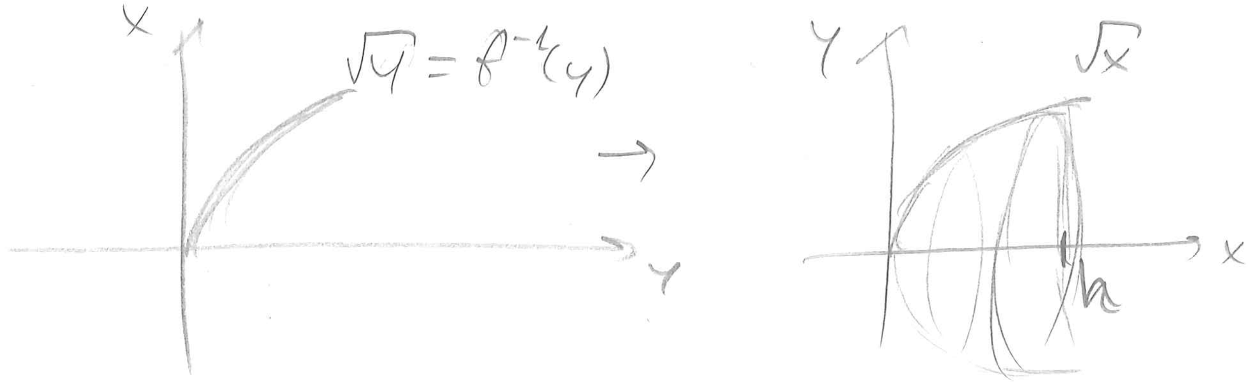
$$V = \pi b^2 \cdot h - 2\pi \int_0^b x f(x)\,dx =$$

$$\pi \cdot (\sqrt{h})^2 \cdot h - 2\pi \int_0^{\sqrt{h}} x \cdot x^2\,dx =$$

$$\pi h^2 - 2\pi \left[\tfrac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{h}} = \pi h^2 - \tfrac{2}{4}\pi \left[x^4\right]_0^{\sqrt{h}} =$$

$$\pi h^2 - \tfrac{\pi}{2}\left((\sqrt{h})^4 - 0\right) = \pi h^2 - \tfrac{1}{2}\pi h^2 = \underline{\tfrac{\pi}{2} h^2}.$$

Alternativt: Vi „vippar" figuren...




... og roterar han om x-aksen i staden

$$V_x = \pi \int_0^h (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_0^h x\,dx = \pi \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^h =$$

$$\pi\left(\tfrac{1}{2}h^2 - 0\right) = \underline{\tfrac{\pi}{2} h^2}.$$

b) No: V og h blir funksjonar av tida. $V(t) = \frac{\pi}{2}(h(t))^2$.

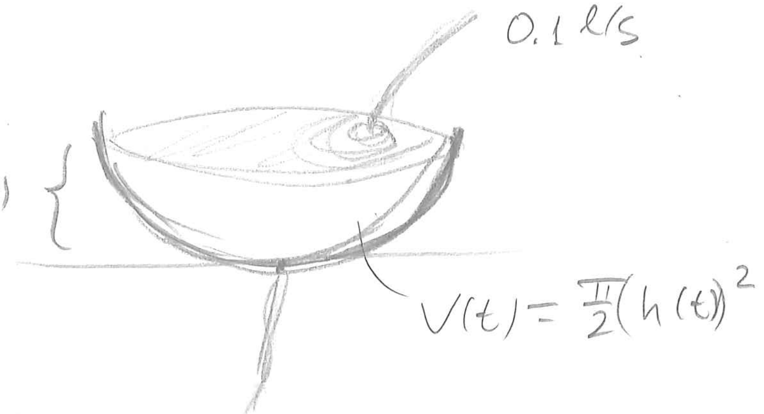
Gitt: $V'(t) = 0.1$ (l/s)

Kopla fart: $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{2} \cdot 2h \cdot h'(t)$

$V'(t) = \pi h \cdot h'(t)$

$$h'(t) = \frac{V'(t)}{\pi h} = \frac{0.1}{\pi \cdot 4} = \underline{\frac{1}{40\pi}} \approx 7.958 \cdot 10^{-3}$$
(dm/s)

c)




$-k\sqrt{h}$ l/s, $k = 0.1$

- To bidrag for $V'(t)$:

$$V'(t) = +0.1 - k\sqrt{h}$$

Framleis [fremdeles]: $V'(t) = \pi h \cdot h'$

Altså: $0.1 - k\sqrt{h} = \pi h \cdot h'$.

Med $k = 0.1$:

$$\underline{-0.1\sqrt{h} + 0.1 = \pi h \cdot h'}$$

Når h aukar, aukar $k\sqrt{h}$ også – heilt til det renn ut like fort som det renn inn. Kva er $h'$ då [?]

↳ $h' = 0$

Vi får $-0.1\sqrt{h} + 0.1 = \pi h \cdot 0$,

$-0.1\sqrt{h}+0.1=0$, $\sqrt{h}=1$, $h=1$ (dm)

Høgda vil stabilisere seg på 1 dm

## (4) Differensiallikningar

$$-0.1\sqrt{h}+0.1=\pi h\cdot h'$$

er eit eksempel på ei differensiallikning; ho inneheld både funksjonen $h(t)$ og den deriverte, $h'(t)$.

Løysinga er $h(t)$ – altså ein funksjon, ikkje eit tal.

$\boxed{?}$ Kvifor er differensiallikningar viktige?

↳ Fordi det er slike vi brukar for å beskrive naturen – og mykje anna

Mellom anna er (nesten alle) dei fysiske lovene differensiallikningar.

Eksempel:

$$ma = F \quad \text{– Newtons andre lov}$$

$$m v'(t) = F(s,t)$$

1. orden

Krafta F varierar med tid og posisjon

eller:

2. orden

$$m s''(t) = F(s,t)$$

Dirac-likninga (i èin dimensjon)

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x,t) = \left[ c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(-i\hbar \frac{d}{dx} + eA(t)\right) + V(x) + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \Psi(x,t)$$

$\Psi$: Bølgefunksjonen

(Ikkje pensum!).

Partiell diff.-likn./ inneheld deriverte i: både tid og rom

Hvis vi berre har èin variabel: Ordinær diff.-likn.

Vi skal no sjå på første ordens ordinære differential-likningar:

$$\boxed{y' = F(x, y)}$$

„Eksempel"

Denne differentiallikninga er gitt:

$$y' = x + \sqrt{y}$$

a) Dersom $x = -1$ og $y = 4$, kva er $y'$?

b) For eit sett med punkt $(x, y)$, illustrér den deriverte med piler.

c) Kva slags informasjon gir likninga om funksjonen $y(x)$? Kva meir treng vi å vite for å bestemme funksjonen?

d) Gitt at $y(-2) = 1.2$, lag eit plott av $y(x)$.

a) Hvis $y(-1)=4$ og $y' = x+\sqrt{y}$:

$y'(-1) = -1+\sqrt{4} = -1+2 = \underline{1}$

Så kva er $y(1.1)$ — sånn circa?

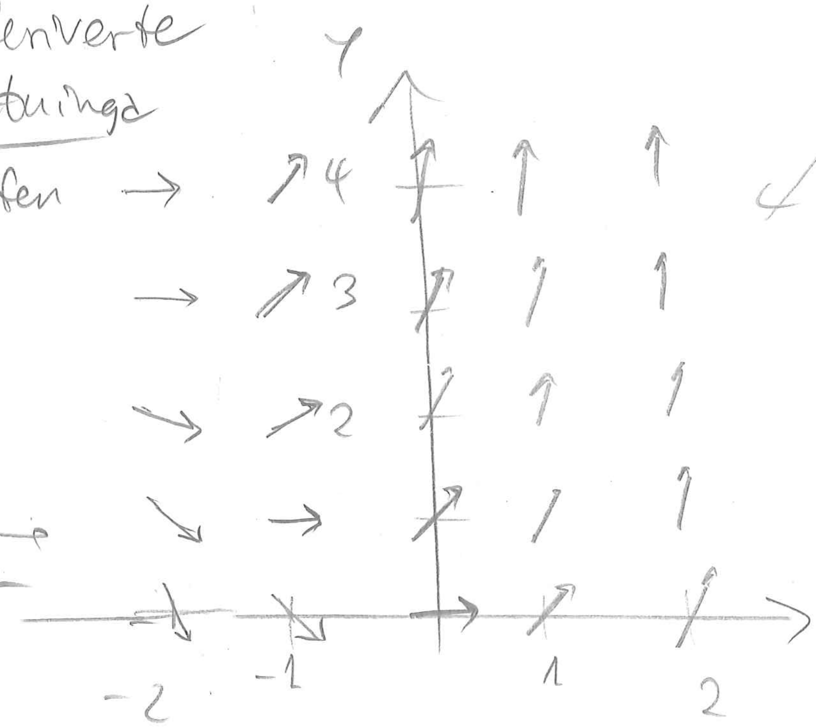
$y(x) \approx y(1) + y'(1)\cdot(x-1)$ ← Kva er dette?

$y(1.1) \approx 4 + 1\cdot 0.1 = \underline{4.1}$

b)

| x \ y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| −2 | −2 | −1 | $-2+\sqrt{2}$ | $-2+\sqrt{3}$ | 0 |
| −1 | −1 | 0 | $-1+\sqrt{2}$ | $-1+\sqrt{3}$ | 1 |
| 0 | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 |
| 1 | 1 | 2 | $1+\sqrt{2}$ | $1+\sqrt{3}$ | 3 |
| 2 | 2 | 3 | $2+\sqrt{2}$ | $2+\sqrt{3}$ | 4 |

Den deriverte gir retninga på grafen →




Veks bratt

Avtar

Retningsfelt

→ Retningsfelt, MATLAB-skript: PlotRetningsfelt.m

Poeng: Korleis $y(x)$ går, er avhengig av kvar vi startar.

Demo: PlotLøysinga.m

c) Vi treng eit startkrav – for eksempel at vi skal starte i $(-2, 1.5)$; $y(-2) = 1.5$.

d) Vi kan estimere $y(x)$ ved å bruke lineær tilnærming – igjen og igjen.

Altså: $y(x) = y(a) + y'(a)\cdot(x-a)$

– når $x$ ligg nær $a$.

Om $y(x_0) = y_0$ er gitt:

$$y'(x_0+h) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x_0+h-x_0)$$

$$= y_0 + F(x_0, y_0)\cdot h$$

Med $y_1 = y_0 + F(x_0,y_0)h$ og $x_1 = x_0 + 1\cdot h$:

$$y_1 = y_0 + F(x_0, y_0)\cdot h$$

→ Så gjentar vi med $(x_1, y_1)$:

$x_2 = x_0 + 2h$

$y(x_2) \approx y_2 = y_1 + F(x_1, y_1) \cdot h$

$\vdots$

Og så vidare.

→ Implementerer:

EulerStegForSteg.m, sjekke

- Metoden heiter <u>Eulers metode</u>.

- Siste algoritmen i kurset.

Litt meir praktisk implementering:

DiffLikenSkript.m

(5) - Av og til har vi analytiske løysingar.

- Vi skal lære oss eit par teknikkar for å finne slike.

## Eksempel

Vis at denne funksjonen:

$$y = e^{\arctan x}$$

er ei løysing av startverdi-problemet

$$y' = \frac{y}{x^2+1}, \quad y(0) = 1$$

---

$$y' = e^{\arctan x} \cdot (\arctan x)' = e^{\arctan x} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{y}{x^2+1} = \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1} = y' \qquad \text{OK}$$

$$y(0) = e^{\arctan 0} = e^0 = 1 \qquad \text{OK}$$

→ Plotte: Retningsfelt: $x \in [-2, 4]$, $y \in [-4, 4]$
Eulers metode, sjekke at det konvergerer mot det same.

(6) Bruke skriptet for Eulers metode til å løyse diff.-likninga for det første eksemplet.