DAFE 1000

20/4

① Beskjedar?

② Fullføre eksempel s. 10–12 i notat frå 16/4

③ Gjennomsnitt (7.4)

For ein funksjon f er gjennomsnittet på intervallet $[a,b]$ definert som

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

(Monte Carlo-integrasjon: Oppg. 9.6 i numerikk-boka)

Eksempel

Dette er ein rimeleg presis modell for spenninga i stikk-kontakten:

$U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ med $U_0 = 325\,V$ og

$\omega = 100\pi \; s^{-1}$ (Hz).

a) Kva er perioden til $u(t)$?

b) Kva er gjennomsnittet av $u(t)$ over èin periode?

c) Kva er gjennomsnittet av $(u(t))^2$ over èin periode?

Bruk at $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

med $f(x) = a\sin(k(x-c))$ er perioden $p = \dfrac{2\pi}{k}$

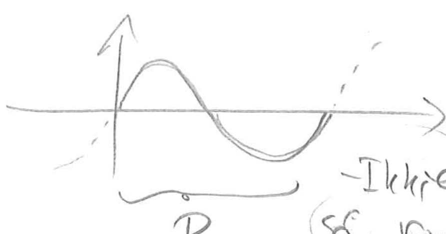
Her: $p = \dfrac{2\pi}{100\pi} = \underline{\dfrac{1}{50}}$ – målt i sekund

b) $\overline{u} = \dfrac{1}{p-0}\int_0^p u(t)\,dt =$

$\dfrac{1}{p-0}\int_0^p u_0 \sin(\omega t)\,dt = \dfrac{u_0}{p}\left[-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right]_0^p =$

$-\dfrac{u_0}{\omega p}(\cos(\omega p) - \cos 0) = -\dfrac{u_0}{\omega p}(\cos(100\pi \tfrac{1}{50}) - 1) =$

$-\dfrac{u_0}{\omega p}\cdot(\cos(2\pi) - 1) = \underline{0}$



– Ikkje så rart

c) $\overline{u^2} = \dfrac{1}{p-0}\int_0^p (u_0 \sin(\omega t))^2\,dt =$

$\dfrac{u_0^2}{p}\int_0^p \dfrac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \dfrac{u_0^2}{2p}\left(\int_0^p 1\,dt - \cancel{\int_0^p \cos(2\omega t)\,dt}\right)$

$= \dfrac{u_0^2}{2p}\left[t + \dfrac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^p = \dfrac{u_0^2}{2p}\cdot p = \underline{\dfrac{1}{2}\cdot(230\,V)^2}$

Meir interessant:

$$\sqrt{\overline{U^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(325V)^2} = \frac{325V}{\sqrt{2}} \approx \underline{230V}$$

– RMS; root mean square.

④ Kor lang er tapen? (eksempel)

Ein tape-rull har ytre radius $b = 5$ cm og indre radius $a = 3$ cm. Den har tjukkna [tykkelsen] $\Delta r = 0.02$ cm
Kor lang er han?

Omkrets: $O = 2\pi r$
Men r blir mindre og mindre.

Første lag:

$O_1 = 2\pi r_1$, $r_1 = b$

Andre lag:

$O_2 = 2\pi r_2$, $r_2 = r_1 - \Delta r$

Tredje lag:

$O_3 = 2\pi r_3$, $r_3 = r_2 - \Delta r = b - 2\Delta r$

⋮

– Ikkje ulikt oppgåva med LP-spelaren

Skript: Taperull.m

Svar: Lengde $L \approx 2.5384 \cdot 10^3$ cm

$\approx \underline{25.4 \text{ m}}$

Men: Her kan vi klare oss utan MATLAB (om vi av ein eller annan grunn skulle ønske det).

L er ein sum:

$$L = 2\pi \sum_{i=0}^{N-1} r_i, \text{ der } r_i = a + i \cdot \Delta r$$

og $N = \dfrac{b-a}{\Delta r}$

$\boxed{?}$ Er dette ein Riemann-sum?

↳ Nei, men vi kan vri det over i ein

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} 2\pi r_i = \frac{2\pi}{\Delta r} \sum_{i=0}^{N-1} r_i \, \Delta r = \frac{2\pi}{\Delta r} \sum_{i=0}^{N-1} f(r_i) \Delta r$$

med $f(r_i) = r_i$

Kva skal til for at Riemann-summen $\sum_{i=0}^{N-1} f(r_i) \Delta r$ skal vere eit integral?

↳ $\Delta r \to 0$ $(N \to \infty)$.

Her er Δr endeleg men <u>liten</u>;

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(r_i) \Delta r \approx \int_a^b r \, dr = \frac{1}{2} \left[r^2 \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Altså:

$$L \approx \frac{2\pi}{\Delta r} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{\pi}{\Delta r}(b^2-a^2) = \frac{\pi}{0.02\,\text{cm}}(5^2-3^2)\,\text{cm}^2$$

$$\approx 2513\text{ cm} \approx \underline{25.1\text{ m}}$$

$\boxed{?}$ Kvifor er dette „opplagt"?

Areal:

$A = \pi b^2 - \pi a^2$

$= \pi(b^2-a^2)$

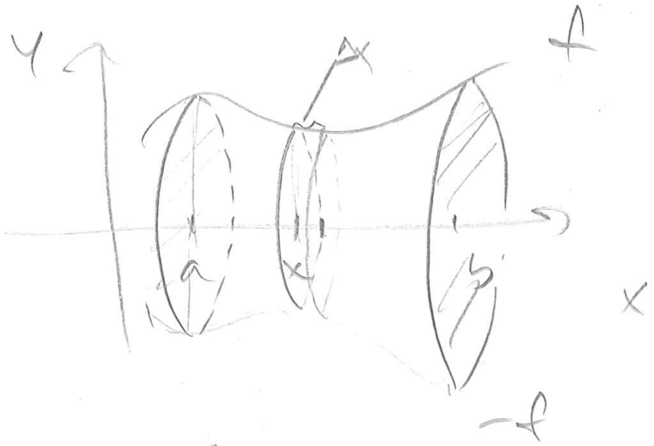
Utstrekt

Smalt rektangel: $A = L \cdot \Delta r$

$$\pi(b^2-a^2) = L \cdot \Delta r$$

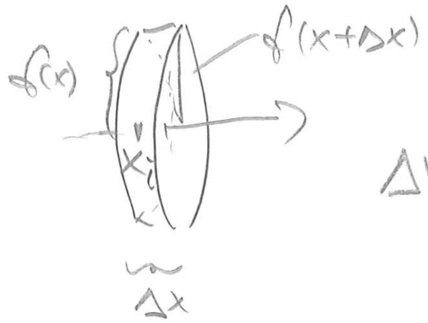
$$\underline{L = \frac{\pi}{\Delta r}(b^2-a^2)}$$

5 Omdreiingsvolum (7.3)



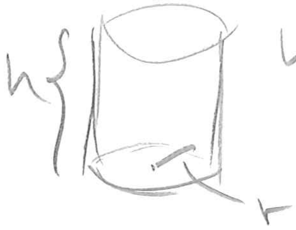
Rotasjon om x-aksen

Korleis finn vi volumet av „dingsen"?
- Vi deler den i bitar og legg bitane saman.



Volum av skiva (sylinder):

$$\Delta V_i \approx \pi \cdot (f(x_i))^2 \cdot \Delta x$$



$V = gh$
$= \pi r^2 h$

Samla volum:

$$V \approx \sum_{i=0}^{N-1} \pi \, (f(x_i))^2 \Delta x$$

der

$x_i = a + i \cdot \Delta x$ og $\Delta x = \frac{b-a}{N}$

[?] Kva kallar vi ein slik sum?

↳ Ein Riemann-sum.

Når $\Delta x \to 0$ $(N \to \infty)$:

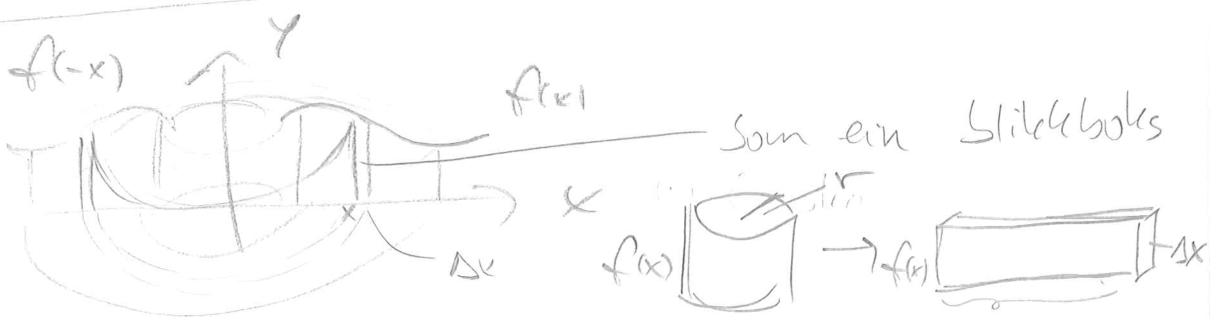
$$\sum_{i=0}^{N-1} \pi \, (f(x_i))^2 \Delta x \to \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Altså:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

Om y-aksen:

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx}$$ $(f \geq 0)$

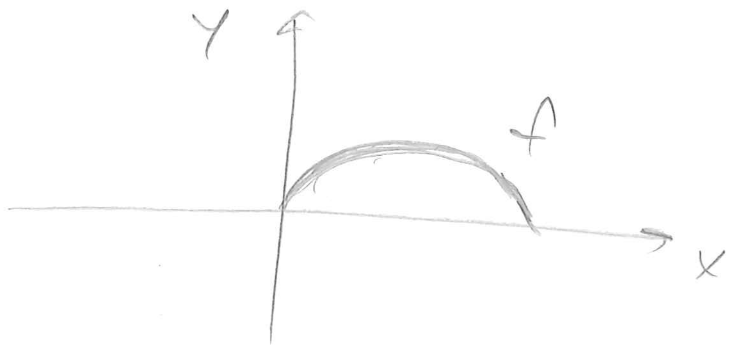


$dV = 2\pi x \cdot f(x) \Delta x$

Eksempel

Denne funksjonen er gitt:

$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad D_f = [0, 2]$



a) Bestem volumet du får når f blir rotert om x-aksen

b) Bestem volumet du får når f blir rotert om y-aksen

---

a) $V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 \, dx = \pi \int_0^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$

Formel: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$V = \pi \int_0^2 \frac{1 - \cos(\pi x)}{2} \, dx =$

$\frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{1}{\pi}\sin(2\pi) - \left(0 - \frac{1}{\pi}\sin 0\right)\right)$

$= \underline{\pi}.$

b) $V = 2\pi \int_0^2 x\, f(x)\, dx =$

$2\pi \int_0^2 x \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx$

Delvis int.:

$\int_a^b u v' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u' v\, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1, \quad v' = \sin(\frac{\pi}{2}x) \Leftarrow v = -\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$$V = 2\pi\left([x \cdot (-\tfrac{2}{\pi})\cos(\tfrac{\pi}{2}x)]_0^2 - \int_0^2 1 \cdot (-\tfrac{2}{\pi})\cos(\tfrac{\pi}{2}x)\, dx \right) =$$

$$2\pi\left(-\tfrac{2}{\pi}[x\cos(\tfrac{\pi}{2}x)]_0^2 + \tfrac{2}{\pi}\int_0^2 \cos(\tfrac{\pi}{2}x)\, dx \right) =$$

$$-2\pi \cdot \tfrac{2}{\pi}\left(2\cos\pi - 0 + [\tfrac{2}{\pi}\sin(\tfrac{\pi}{2}x)]_0^2 \right) =$$

$$-4\left(-2 + \cancel{\tfrac{2}{\pi}(\sin\pi - \sin 0)}\right) = \underline{8}$$

Eksempel

NB! Blir ikkje forelest

Profilen til ei flaske er gitt ved

$p(x) = \sqrt{\arctan(4-3x) + 1.7}, \quad D_p = [-5, 5]$

Eining [enhet] for p og x: cm.

Kor mykje rommar flaska?

Trapesmetoden i MATLAB

$\rightarrow$ gir $V = 65.995$

Her kan det gjerast analytisk:

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \sqrt{\arctan(4-3x) + 1.7}^{\,2} \, dx$$

Ser på $\int \arctan x \, dx = \int 1 \cdot \arctan x \, dx$

Delvis int.: $\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$

$v' = 1 \Leftarrow v = x, \quad u = \arctan x \Rightarrow u' = \frac{1}{x^2+1}$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{x^2+1} \, dx$$

Variabelbyte: $u = x^2+1, \quad \frac{du}{dx} = 2x, \quad dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int x \frac{1}{x^2+1} \, dx = \int x \frac{1}{u} \frac{1}{2x} \, du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} \, du =$$

$$\frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

Det gir:

$$V = \pi \int_{5}^{5} \sqrt{\arctan(4-3x) + 1.7}^{\,2} \, dx =$$

$$\pi \int_{5}^{5} (\arctan(4-3x) + 1.7) \, dx =$$

$$\pi \int_{-5}^{5} \arctan(4-3x) \, dx + \pi \int_{-5}^{5} 1.7 \, dx \overset{u=4-3x}{=}$$

$$\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \int_{4-3\cdot(-5)}^{4-3\cdot 5} \arctan u \, du + \pi \cdot 1.7 [x]_{-5}^{5} =$$

$$\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \left[u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1)\right]_{19}^{-11} + \pi \cdot 1.7 \cdot (5-(-5))$$

$$= +\frac{\pi}{3} \left[u \arctan u - \frac{1}{2} \ln(u^2+1)\right]_{-11}^{19} + 17\pi =$$

$\frac{\pi}{3}$ [19 arctan 19 − $\frac{1}{2}$ ln (19² + 1) −

((−11) arctan (−11) − $\frac{1}{2}$ ln ((−11)² + 1))] + 17π =

65.9952

− Flaska rommar ca 66 cm³

Eksempel (Blir ~~førelest~~)

Profilen til ei flaske er gitt ved

$p(x) = 0.7 \arctan(4 - 3x) + 2, \quad D_p = [-5, 5]$

Eining [enhet]: cm

Kor mykje rommar flaska?

→ Vis plott

→ Trapesmetoden i MATLAB:

	T_n
n = 10	190.319
n = 50	189.215
n = 100	189.215

Flaska rommar 189.2 cm³ ≈ 1.89 dl

⑥ Arbeid

Frå fysikken.
Arbeid, W, er kraft ganger veg, $F \cdot s$.
Men kva om krafta ikkje den same heile vegen?

Eksempel

Ein satelitt med massen $m = 500\,kg$ skal settast i bane i høgde $H = 35\,786\,km$ over jordoverflata.
Tyngdekrafta i høgde h er

$$G = k \frac{Mm}{(R+h)^2}$$

der $k = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$, $M = 5.97 \cdot 10^{24}\,kg$ er jord-massen og $R = 6371\,km$ er jord-radien.

a) Kvifor er det vanlegvis ok å gå ut frå at $G = mg$, der $g = 9.81\,m/s^2$?

b) Kor stort arbeid må ein gjere for å overvinne tyngdekrafta når satelitten skal i bane?

a) Vanlegvis er h mykje mindre enn R, slik at $G(h) \approx G(0) = k\dfrac{Mm}{(R+0)^2} =$

$$m \cdot k\frac{M}{R^2}$$

der $k\dfrac{M}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\dfrac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \dfrac{5.97 \cdot 10^{24}\,kg}{(6371 \cdot 10^3\,m)^2} = 9.81\,m/s^2$

Utrekning: Tilordne k, M og R i MATLAB:

```
>> g = k*M/R^2
```

b) - Krafta må vere like stor som G: $F = G(h)$

For å gå frå h til $h+\Delta h$ - der Δh er liten:

$$\Delta W = F(h) \cdot \Delta h = G(h)\,\Delta h$$

Totalt: $W \approx \sum_{i=0}^{N-1} \Delta W_i = \sum_{i=0}^{N-1} G(h_i) \cdot \Delta h_i$

- Lar $\Delta h_i \to 0$:

$$W = \int_0^H G(h)\,dh = \int_0^H k\frac{Mm}{(R+h)^2}\,dh =$$

$kMm\int_0^H (R+h)^{-2}\,dh$, $\quad u = R+h$, $du = dh$

$$W = kMm\int_R^{R+H} u^{-2}\,dh = kMm\left[-u^{-1}\right]_R^{R+H} =$$

$$kMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right) = \ldots = \underline{2.653 \cdot 10^{10}\,J}$$