DAFE 1000

16/4

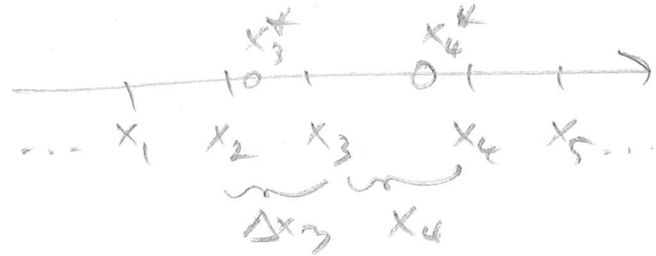
① Beskjedar?

I dag: Dekker <u>ikkje</u> alt i førelesinga; gjer oppgåver og spør!

② Frå tidlegare:

Definisjon:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{N} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$



$\Delta x_i \to 0$: dx

— Areal under graf

Fundamentalteoremet (for kalkulus):

← „smørstein"

Dersom $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

③ Eksempel

Farten til ein fallskjermhoppar, målt i m/s, som funksjon av tida t, målt i sekund er

$$v(t) = 50(1 - e^{-t/5})$$

a) Frå tidspunktet $t=0$, då ho hoppa ut, til $t=10$, kor langt har ho falt?

b) Gitt at $s(0)=0$, bestem $s(t)$, der s er lengda ho har falt ved tida t.

---

a)

Veit: $v(t) = s'(t)$

Ved fundamentalteoremet:

$$\Delta s = s(10) - s(0) = \int_0^{10} v(t)\,dt =$$

$$\int_0^{10} 50(1 - e^{-t/5})\,dt = 50\left(\int_0^{10} 1\,dt - \int_0^{10} e^{-t/5}\,dt\right)$$

$$t' = 1, \quad (-5e^{-t/5})' = -5 \cdot e^{-t/5} \cdot \left(-\tfrac{1}{5}\right) = e^{-t/5}$$

$$\Delta s = 50\left[t - (-5)e^{-t/5}\right]_0^{10} =$$

$$50\left(10+5e^{-10/5}-(0+5e^{0})\right)=$$

$$50(5+5e^{-2}) = \underline{250(1+e^{-2})} \simeq 283.8$$

- Ho har falt ca. $\underline{283.8\ m}$.

b) To måtar

1) $$\Delta s = s(b)-s(a) = \int_a^b v(t)\,dt$$

Altså:

$$s(t)-s(0) = \int_0^t v(t')\,dt'$$

„t merka"

$$s(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + s(0) =$$

$$50\left[t'+5e^{-t'/5}\right]_0^t + 0 =$$

$$50\left(t+5e^{-t/5}-(0+5e^{0})\right) =$$

$$\underline{50\left(5e^{-t/5}+t-5\right)}$$

2) Ubestemt integral.

Veit at $\left(50\left(t+5e^{-t/5}\right)\right)' = v(t)$

Det betyr at

$$s(t) = 50\left(t+5e^{-t/5}\right) + C$$ Viktig!

Startkrav: $s(0)=0$ – bestemmer C.

$$s(0) = 50\,(0 + 5 \cdot e^{0}) + C' = 0$$

$$50 \cdot 5 + C' = 0, \quad C' = -250$$

$$s(t) = 50\,(t + 5e^{-t/5}) - 250 =$$

$$50\,(t + 5\,e^{-t/5} - 5) =$$

$$50\,(t + 5\,(e^{-t/5} - 1))$$

- Har her innført det ubestemte integralet:

Dersom $F'(x) = f(x)$ er det ubestemte integralet

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C'$$

Merk: Skrivemåten er veldig lik skrivemåten for (det bestemte) integralet. Motivasjonen for dette er utelukkande fundamental-teoremet.

(4) Eksempel med antiderivasjon.

Liste over reglar for ubestemte integral.

Linearitet:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\, f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

Delvis int.:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x)\, v(x)\,dx$$

Variabelbyte / subst.:

$$\int g(u) \cdot u'(x)\,dx = \int g(u)\,du$$

Visse elementære funksjonar

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad \left(\text{eigentleg: } \begin{cases} \ln|x| + C_1, & x < 0 \\ \ln|x| + C_2, & x > 0 \end{cases}\right)$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

$\vdots$

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala:

a) $\int (x^{7.2} + \cos x - 2\sqrt{x})\,dx$

b) $\int \frac{5}{1+x^2}\,dx$

c) $\int x e^x\,dx$

---

a) $\int (x^{7.2} + \cos x - 2\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{7.2+1} x^{7.2+1} + \sin x -$

$2 \cdot \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{8.2} x^{8.2} + \sin x + 2 \cdot \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} + C$

$= \frac{1}{8.2} x^{8.2} + \sin x + \frac{4}{3} x^{3/2} + C$

b) $\int \frac{5}{1+x^2}\,dx = 5 \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = 5 \arctan x + C$

c) $\int x e^x\,dx$

Delvis: $\int u v'\,dx = uv - \int u' v\,dx$

Med $u = x$ og $v' = e^x$:

$u' = 1$ og $v = e^x$ (her treng vi ikkje C)

$\int x e^x\,dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x\,dx = x e^x - e^x + C =$

$e^x(x-1) + C$

Kontroll: $(e^x(x-1) + C)' = e^x(x-1) + e^x \cdot 1 + 0 =$

$x e^x - e^x + e^x = x e^x$ Ok

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala ved variabelbyte

a) $\int x e^{-x^2} dx$

b) $\int x^{14} \cos x^{15} dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$

---

a) $u = -x^2$ gir $\frac{du}{dx} = -2x$ slik at $dx = \frac{1}{-2x} du$

$\int x e^{-x^2} dx = \int x e^u \frac{1}{-2x} du = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{1}{2} e^u + C$

blande   Berre u $= -\frac{1}{2} e^{-x^2/2} + C$

b) $u = x^{15}$ gir $\frac{du}{dx} = 15x^{14}$ slik at $dx = \frac{1}{15x^{14}} du$

$\int x^{14} \cos x^{15} dx = \int x^{14} \cos u \frac{1}{15x^{14}} dx = \frac{1}{15} \int \cos u du$

$= \frac{1}{15} \sin u + C = \frac{1}{15} \sin x^{15} du$

c) $u = x-1$, $du = dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}} dx = \int \frac{u+1}{\sqrt{u}} du = \int \left(\frac{u}{\sqrt{u}} + \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du$

$= \int (u^{1/2} + u^{-1/2}) du = \frac{2}{3} u^{3/2} + 2u^{1/2} + C = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2\sqrt{x-1} + C$

Alternativt: $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} dx = \int \left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}\right) dx$

$= \ldots$

Eksempel

a) Finn dette ubestemte integralet ved variabelbytte:

$$\int \sin(3x-7)\,dx.$$

b) Vis at dersom $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

c) Gjør oppg. a) om igjen.

d) Finn dette ubestemte integralet:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx.$$

---

a) $u = 3x-7$, $\frac{du}{dx} = 3$, $dx = \frac{1}{3}du$

$\int \sin(3x-7)dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \sin u\,du =$

$-\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3x-7) + C$

b) Veit: $\int f(x)dx = F(x) + C$

$u = ax+b$ gir at $\frac{du}{dx} = a$ slik at $dx = \frac{1}{a}du$

$\int f(ax+b)dx = \int f(u)\cdot\frac{1}{a}du = \frac{1}{a}\int f(u)du =$

$\frac{1}{a}F(u) + C = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

c) Veit at $-\cos x$ er ein antiderivert til $\sin x$. Ved formelen frå 5):

$\int \sin(3x-7)\,dx = \frac{1}{3}(-\cos(3x-7)) + C$

d) Oppgåva lukter delbrøkoppspalting. Men: Røtene til nemnaren er komplekse. - Kanskje vi må prøve å „vri det over" i eit uttrykk av typen $\frac{1}{1+x^2}$, slik at vi får eit uttrykk med $\arctan x$.

$x^2-2x+3 = (x-1)^2-1+3$ (2. kvadratsetning)

$(x-1)^2+2 = 2\left(\frac{1}{2}(x-1)^2+1\right) =$

$2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$, $u = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Altså:

$$\int \frac{1}{x^2-2x+3}\,dx = \int \frac{1}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\,dx =$$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{(ax+b)^2+1}\,dx$ med $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ og $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vi får: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+C =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)\right)+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)\right)+C$

Oppsummert: Dersom $F'(x) = f(x)$, er

$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

(5) Med bestemte integral

Finn desse (bestemte) integrala eksakt:

a) $\int_{-1}^{1} x e^{2x}\, dx$

b) $\int_{1}^{2} x \sin x^2 \, dx$

To måtar: 1) Ta det som eit bestemt integral „på strak arm".

2) Først ubestemt, så bestemt.

Ikkje bland dei!

a) Delvis:

$\int_a^b u v' \, dx = [u v]_a^b - \int_a^b u' v \, dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1, \quad v' = e^{2x} \Leftarrow v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$\int_{-1}^{1} x e^{2x} dx = [x \frac{1}{2} e^{2x}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx =$

$\frac{1}{2}(1 e^2 - (-1) \cdot e^{-2}) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{2x} dx =$

$\frac{e^2 + e^{-2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [e^{2x}]_{-1}^{1} = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}(e^2 - e^{-2}) =$

$\frac{2e^2 + 2e^{-2} - e^2 + e^{-2}}{4} = \underline{\frac{e^2 + 3e^{-2}}{4}}$ (≈ 1.949)

Alternativt:

Først:

$$\int x e^{2x} dx = \ldots = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$\int_{-1}^{1} x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \cancel{+C}\right]_{-1}^{1} = \ldots$$

Ikkje:

$$\int_{-1}^{1} x e^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int_{-1}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \ldots$$

?!

b) $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$ slik at $dx = \frac{1}{2x} du$

$u(1) = 1^2 = 1, \quad u(2) = 2^2 = 4$

$$\int_1^2 x \sin x^2 dx = \int_{u(1)}^{u(2)} x \sin u \frac{1}{2x} du =$$

NB!

$$\frac{1}{2}\int_1^4 \sin u du = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_1^4 = \frac{1}{2}(-\cos 4 - (-\cos 1)) =$$

$$\underline{\underline{\frac{\cos 1 - \cos 4}{2}}}$$

Alternativt:

$$\int x \sin x^2 dx = \ldots = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$

$$\int_1^2 x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2}\left[\cos x^2\right]_1^2 = \ldots$$

Ikkje:

$\int_1^2 x \sin x^2 dx = \int_1^2 x \sin u \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2}\int_1^2 \sin u du$

Feil!

Svaret blir ~~feil~~ om vi set inn 2 og 1 for u.

Om vi går tilbake til x til slutt blir svaret rett:

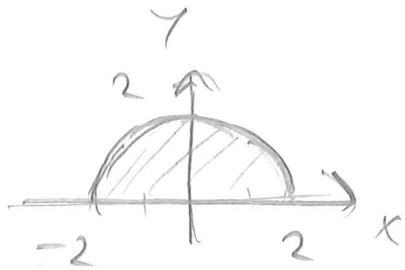
$\ldots -\frac{1}{2}[\cos u]_1^2 = -\frac{1}{2}[\cos x^2]_1^2 = \ldots$

Men: Dette er tungvindt, unødvendig.
Dessuton er det i beste fall forvirrande det ein gjer undervegs.

⑥ Eksempel med numerisk int.
(Ikkje berre hypotetisk)

Ein matematikklærar ønsker å vise studentane sine kor god trapesmetoden er. Som eksempel har han vald

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\pi$$



a) Når han skal vise at trapesmetoden er betre enn einsidige Riemann-summar, får han same sum heile tida. Kvifor?

b) Teorien seier at

$$\int_a^b f(x)\, dx = T_n + \frac{M_2}{12}(b-a)\cdot h^2$$ der

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{og} \quad |M_2| \le \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Men når han plottar feilen mot h, går det ikkje som h^2 i det heile. Kvifor?

a) Demo. i MATLAB.

$V_n = h\,(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\qquad)$

$H_n = h\,(\qquad f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+f(x_n))$

$T_n = h(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n))$

- Forskjellane ligg <u>berre</u> i endane

Men her er $x_0=a=-2$ og $x_n=b=2$ og

<u>$f(\pm 2)=0$</u>.

b) Vise plott.

- Ser på M_2. Denne er avgrensa av den maksimale dobbeltderiverte av

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(0-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1\sqrt{4-x^2}-x\left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)}{(\sqrt{4-x^2})^2} = \frac{\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} =$$

$$\frac{4-x^2-x^2}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{4-2x^2}{(4-x^2)^{3/2}}$$

Ser: $f''(x)\to-\infty$ når $x\to\pm 2$

- Vi <u>har</u> inga øvre grense for M_2;

„$M_2=\infty$".