DAFE 1000

(1) Beskjeder?

(2) Frå sist:

To metodar for numerisk integrasjon

Trapesmetoden:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n$ med

$$T_n = h\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(x_n)\right)$$

der h (Δx) er $\frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i \cdot h$

- vise figur

Simpsons metode

$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n$ med

$$S_n = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right).$$

Merk: her <u>må</u> n vere eit partal

- vise figur

Har også sett på einsidige Riemann-summar

$V_n = h\,(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})$ og

$H_n = h\,(\quad f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n))$

$(T_n = \frac{V_n + H_n}{2})$

NB:
Må vite kva ein Riemann-sum er no!

Feil (skal ikkje utleie dei her; sjå evt. eige notat om Simpsons metode):

$$\int_a^b f(x)\,dx = H_n + \frac{M_1 (b-a)^2}{2n}$$

der $\quad |M_1| \leq \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$

med $h = \frac{b-a}{n}$ er feilen $\frac{M_1(b-a)}{2} \cdot \underline{h^1}$

For trapesmetoden er feilen

$$\frac{M_2 (b-a)^3}{12\, n^2} = \frac{M_2 (b-a)}{12} \cdot \underline{h^2}$$

$(|M_2| \leq \max_{x\in[a,b]} | f''(x)| \;)$

Simpsons:

$$\frac{M_4 (b-a)^5}{180\, n^4} = \frac{M_4 (b-a)}{180} \cdot \underline{h^4}$$

i fjerde!

- Vise plott frå mandag - med h^n

Oppgåver frå numerikk-boka: 9.1 - 3

(?) Kva metode er best av trapesmetoden og ein Riemann-sum med midtpunkt?

→ Feilen i den siste er $\frac{M_2(b-a)}{24} \cdot h^2$

- Faktor 2 betre, same h-potens.

Kva fordel kan trapesmetoden ha over midtpunktsmetoden?

→ Finne integral frå tabellar

<u>Eksempel</u>: Aug. 15, nr. 4

Gitt tabell

NB: „endringene i inntektsstrømmen" skulle vore „endringsratene ..."; det gir ikkje meining å snakke om endring på eit tidspunkt. (Ein <u>kan</u> snakke om endring over eit intervall.)

a) $I(t)$: Inntektsstraum i kr per time ved t – målt i timar etter midnatt.
Midtpunktsformelen: $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$$I'(15) = \frac{I(15+3) - I(15-3)}{2 \cdot 3} = \qquad (h=3)$$

$$\frac{I(18)-I(12)}{6} = \frac{3500-2000}{6} = 250$$

Med eining: $\underline{250 \text{ kr}/h^2}$

$$I'(19.5) = \frac{I(19.5+1.5) - I(19.5-1.5)}{2 \cdot 1.5} =$$

$$\frac{I(21)-I(18)}{3} = \frac{2000-3500}{3} = -500$$

Med eining: $\underline{-500 \text{ kr}/h^2}$

[?] Så dei taper pengar?
→ Nei, inntektsstraumen er framleis positiv. Men pengane strøymer ikkje inn like raskt som i stad.

[?] Kva estimat bør vere best?
→ det siste, h er mindre.

b) $I(t)$: Inntektsstraum, farten kapitalen endrar seg med. Dersom $K(t)$ er kapitalen: $I(t) = K'(t)$

Altså: $K(b) - K(a) = \int_a^b I(t)\,dt$

$\Delta K = \int_{12}^{24} I(t)\,dt \approx T_n$ der

$T_n = h\left(\frac{1}{2}I(12) + I(15) + I(18) + I(21) + \frac{1}{2}I(24)\right)$

– Trapesmetoden, $h = 3$

$\Delta K \approx 3\left(\frac{1}{2}\cdot 2000 + 2500 + 3500 + 2000 + \frac{1}{2}\cdot 500\right)$

$= 27750.$

Med eining: 27 750 NOK.

$\boxed{?}$ Kvifor ville det vere problematisk å bruke midtpunktmetoden (for integrasjon) her?

→ Har ikkje funksjonsverdiane i midtpunkta.

$\boxed{?}$ Kunne vi ha brukt Simpsons metode her?

$n = 4$, partal

↳ Ja, det kan vi.

$$\int_{12}^{24} I(t)\,dt \approx S_4 =$$

$$\frac{h}{3}\left(I(12)+4\,I(15)+2\,I(18)+4\,I(21)+I(24)\right) =$$

$$\frac{3}{3}(2000+4\cdot 2500+2\cdot 3500+4\cdot 2000+500) =$$

$$\underline{27500}$$

(Heldigvis ikkje så stor forskjell).

S_4 er nok eit betre estimat enn T_4.

<u>Problem</u>: Vi har i veldig liten grad føresetnader [forutsetninger] for å vurdere kor nøyaktig svaret er.

Merk: Vi har alt „konkludert" at sidan $I(t) = K'(t)$, er

$$K(b) - K(a) = \int_a^b I(t)\,dt.$$

Det er rett – men <u>ikkje</u> opplagt!

Integralet er definert ved Riemann-summar, ikkje antiderivert!

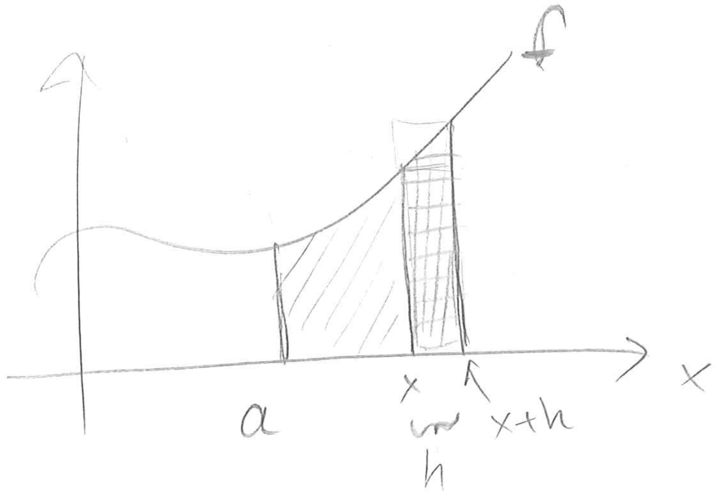
(3)

- Vi har alt brukt fundamentalteoremet for kalkulus:

Dersom $F(x)$ er ein anti-derivert for $f(x)$, $F'(x) = f(x)$, er

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- Såpass viktig at vi tar oss „bryet" med å bevise det.



Skravert areal:

$$G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

f: Kontinuerleg, veksande og positiv.

Ser: $G(x+h) - G(x)$ er det rutete arealet. Med $f(x)$ veksande:

$$h \cdot f(x) \leq G(x+h) - G(x) \leq h \cdot f(x+h)$$

$$f(x) \le \frac{G(x+h)-G(x)}{h} \le f(x+h)$$

- Lar så $h \to 0^{(+)}$

Kvifor er $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ $\boxed{?}$

↳ f er kont.

Kva er $\lim_{h \to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h}$?

↳ $G'(x)$ – per definisjon.

Altså: $G'(x)$ skvist mellom $f(x)$ og $f(x+h)$, som begge går mot $f(x)$ (skvis-teoremet).

Altså: $G'(x) = f(x)$, G er <u>ein</u> anti-derivert til $f(x)$.

Vi skal ha <u>den</u> antideriverte $F(x)$ som er slik at $F(0)=0$ (Kvifor [hvorfor]?).

Men: Hvis F og G begge er anti-deriverte, kan forskjellen berre vere ein konstant, $F(x) = G(x) + c$

Altså

$F(b) - F(a) \quad (= F(b))$

$= G(b) + C - (G(a) + C) =$

$G(b) - G(a) + C - C = G(b) - G(a)$

Poeng: Det spelar ikkje noko rolle kva for ein antiderivert vi brukar når vi tar differansen.

$\square$

Eksempel

Bestem $\int_{-2}^{1} e^{x/2}\,dx$ ved antiderivasjon og kontroller at ein Riemann-sum nærmar seg det same når Δx_i-ane blir små.

$\boxed{?}$ Kva må vi derivere for å få $e^{x/2}$?

$(e^x)' = e^x$, men $(e^{x/2})' = \frac{1}{2} e^{x/2}$

Kva så med $2e^{x/2}$?

$(2e^{x/2})' = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{x/2} = e^{x/2}$ OK

Fundamentalteoremet seier no at

$$\int_{-2}^{1} e^{x/2}\,dx = 2e^{1/2} - 2e^{-2/2}$$

$$= \left[2e^{x/2}\right]_{-2}^{1} \quad \leftarrow \text{skrivemåte}$$

$$= 2\left(\sqrt{e} - \frac{1}{e}\right)$$

For å sjekke: Brukar t.d. skriptet EstimereIntegral.m – med stadig høgare N.

④ Litt prat?

$\boxed{?}$ Når er fundamentalteoremet nyttig?

↳ Når vi „tilfeldigvis" har ein integrand f(x) som er mogeleg, og helst lett, å antiderivere.

- Slik er det vanlegvis ikkje, dei fleste elementære funksjonar har ikkje nokon elementær anti-derivert. Eksempel $\boxed{?}$

Ofte er heller ikkje f(x) elementær sjølv. Kanskje har vi ikkje ein gong eit uttrykk for han; den kan vere „gitt" som ein tabell (jmf. eksempelet).

$\boxed{?}$ Kva skal til for å bli god til å integrere?

$\swarrow$ Kode

$\searrow$ Antiderivere

Ja, takk, begge deler.

Men: Kodinga er eit kraftigare verktøy.

For å lære dette, må du <u>gjere</u> det.

Altså: Det er <u>ikkje nok</u> å øve seg i anti-derivasjon (jmf. diskusjon på onsdag).

Sidan anti-derivasjon er det motsette av derivasjon, har vi ein èin-til-èin-samanheng [sammenheng] mellom alle reglar:

Linearitet

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$

$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$

(også opplagd frå definisjonen)

Produktregelen

$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

? Delvis integrasjon

$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u\cdot v]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$

Kjerneregelen

$f(x) = g(u(x))$:

$f'(x) = g'(u)\cdot u'(x)$

? Variabelbyte/substitusjon

$\int_a^b f(x)\,u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$

Elementære funksjonar:

$(x^r)' = r\,x^{r-1}$ $\qquad$ $\int_a^b x^r\,dx = \left[\frac{1}{r+1}x^{r+1}\right]_a^b$

$(r \neq -1)$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln x$ $\qquad$ $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_a^b$

NB, ok for $x<0$

$(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $\int_a^b \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_a^b$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $\int_a^b \cos x\,dx = \left[\sin x\right]_a^b$

$(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $\int_a^b e^x\,dx = \left[e^x\right]_a^b$

$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \left[\arctan x\right]_a^b$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\arcsin x\right]_a^b$

$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

5 Spørsmål (oppriktig, ikkje retoriske)

Her er to måtar å seie det same på. Kva er tydelegast?

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} R_{P,S}$,

$R_{P,S} = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i^* = a + (i - \frac{1}{2})\Delta x$

og

```
funk =@(x) ...
a=...
b=...
n=...

DeltaX =(b-a)/n;
R =0;

for  i=1:n
    x = a+(i-0.5)*DeltaX;
    R = R + funk(x);
end

R = DeltaX*R
```

Poeng:

- Å implementere numeriske metodar er ein ferdighet i seg - ein vi skal øve på.
- Det er også noko som gjer teorien tydelegare, meir praktisk.