DAFE 1000, 9. april

1) - Innleveringa blir delt ut i pausen
- Gjort 9.1 i numerikk-boka [?]

2) Ein ting vi såg på sist:

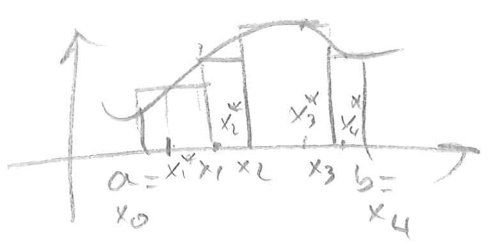
A er invertibel $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

Eksempel s. 11 i notat frå 6/4.

3) Integralet

Sjå s. 12, 13 i notat frå 6/4

4) Formell definisjon av integralet



Oppeling, P:

$[a,b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$

Utval av punkt, S:

$x_1^* \in [x_0, x_1]$, $x_2 \in [x_1, x_2]$, ...

Samla areal av rektangla:

$$R_{P,S} = \Delta x_1 f(x_1^*) + \Delta x_2 f(x_2^*) + \Delta x_3 f(x_3^*) + \Delta x_4 f(x_4^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \Delta x_i f(x_i^*), \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0, \; \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots$$

– Riemann-sum.

Dersom alle Δx_i-ane er like:

–Regulær oppdeling (partisjon).

Dersom alle Δx_i-ane blir uendeleg små (og uendeleg mange): R nærmar seg arealet under grafen (for $f(x) \geq 0$)

Definisjon av integralet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

der $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$,

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ og $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$

Kommentarar:

- Men – er ikkje integrasjon det same som antiderivasjon, da?

  ↳ Nei

- Likskap: $\int \sim \Sigma$ (gresk S) og $dx \sim \Delta x_i$

dx blir som ein uendeleg liten Δx, og $\int$ blir som ein sum med uendeleg mange element.

• Definisjonen er streng; der er mange måtar å dele opp $[a,b]$ på og x_i^* kan velgast på mange måtar. I alle tilfeller krever vi at vi skal få det same når alle Δx_i-ane går mot null.

Vi kan velge x_i^* på mange måtar. Men ikkje alle er like lure.

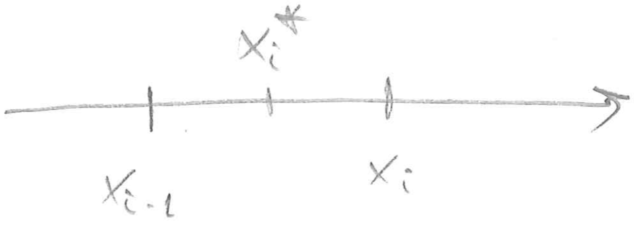
Eksempel

a) Bestem $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}\, dx$ eksakt.

b) Med $x_i^* = x_{i-1}$ (venstre kant) og like store x_i-ar, kor fin oppdeling treng vi av intervallet før feilen blir mindre enn 10^{-4}?

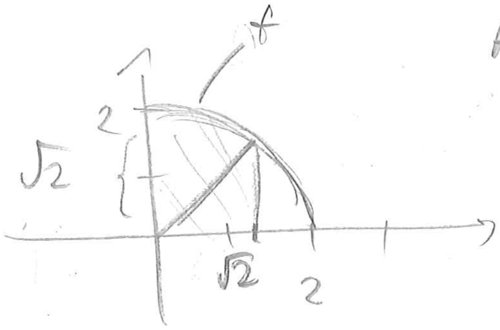
c) Og dersom vi vèl høgre kant; $x_i^* = x_i$?

d) Kor fin oppdeling treng vi om vi vel midtpunktet, $x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$



e) Plott feilen som funksjon av oppdeling.

a) Sirkel om origo:
$x^2 + y^2 = r^2$



Areal: $\frac{1}{8}$ av en sirkel med radius 2 og en trekant

Arealet er
$$\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 2^2 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \underline{\frac{\pi}{2} + 1}.$$

Resten: I MATLAB.

Forslag: RiemannSum.m (justerar x_i^* i same skript).

e) - Funksjonsfil for Riemann-sum:
RiemannFunk.m

Skript for å plotte feil:
RiemannFeil.m

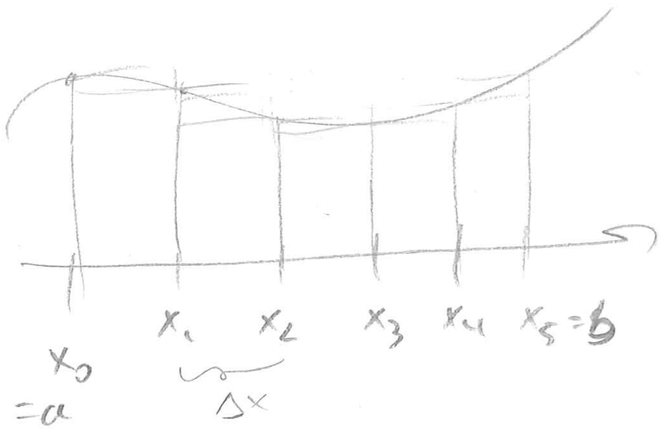
(5) Trapesmetoden og Simpsons metode.

"Eksempel"

Vi tenker oss at ein funksjon f er integrerbar på $[a,b]$. Vidare deler vi opp intervallet $[a,b]$ i $N=5$ like store deler

a) Finn ein formel for gjennomsnittet av den Riemann-summen vi får om vi velger venstre endi i kvart del-intervall og den vi får om vi konsekvent velger høgre verdi

b) Bestem summen av areala vi får om vi i kvart del-intervall tilnærmar $f(x)$ med linja gjennom $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ og $(x_i, f(x_i))$.



$$\Delta x = \frac{b-a}{5}$$

Venstre-sum:

$$V_5 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_4)\Delta x$$

Høre-sum:

$$H_5 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_5)\Delta x$$

Snitt:

$$T_5 = \frac{V_5 + H_5}{2} =$$

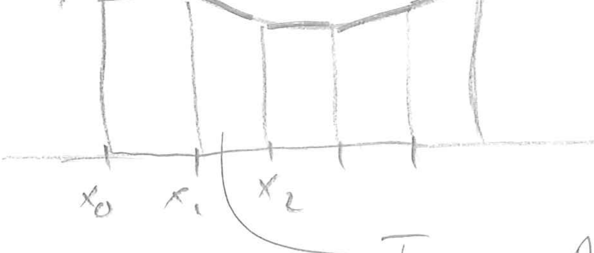
$$\frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)\big) =$$

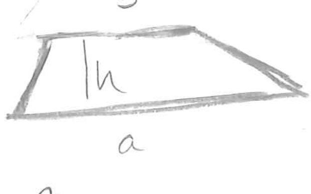
$$\frac{\Delta x}{2}\big(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + f(x_5)\big) =$$

$$\Delta x\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_4) + \tfrac{1}{2}f(x_5)\right)$$

↳ Oppdatér RiemannFeil.m

b)





$$A = \frac{a+b}{2}h$$

Trapes: $A = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x$

Sum:

$$T_5 = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\Delta x + \dots + \frac{f(x_4)+f(x_5)}{2}\Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2}\Big(f(x_0) + \overbrace{f(x_1)+f(x_1)}^{2f(x_1)} + f(x_2) + f(x_2) + \dots + f(x_4) + f(x_4) + f(x_5)\Big) =$$

$$\Delta x\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_4) + \tfrac{1}{2}f(x_5)\right)$$

– Same formel.

Trapesmetoden for numerisk integrasjon:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_N$ der

$$T_N = \Delta x\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) + f(x_N)\right)$$

med $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ og $x_i = a + i\cdot\Delta x$

Kan vise at feilen i estimatet

er $|E_N| \le \underbrace{\frac{M_2(b-a)^3}{12N^2}}_{\sim h^2}$, $M_2 \ge |f''(x)|$, $x \in [a,b]$

Merk: • Metoden er omtrent like god som ein vanleg Riemann-sum med midtpunkt (faktisk litt dårlegare).

• Fordel: Fungerar bra med funksjonar gitt på tabellform (sjå eksempel seinare).

Tilnærming: f(x) er ei linje i kvart del-intervall.

- Kvifor ikkje bruke 2.-grads-polynom i staden?

Vise figur:

Gjer vi dette, får vi

Simpsons metode for numerisk integrasjon:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_N$ der

$$S_N = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{N-1}) + f(x_N)\right)$$

Feil: $|E_N| \leq \frac{M_4 (b-a)^5}{180 N^4}$, $M_4 \geq |f^{(4)}(x)|$, $x \in [a, b]$

$\sim h^4$

Merk: Her må N vere eit partal

Eksempel:

- Same som før - men med Simpsons metode.

Hvis tid: Oppg. 10 frå eksamen des. -15.