DAFE1000, 6. april

① Oppdatering om innleveringa:

Ferdig retta på fredag?

Innlev. nr. 4 lagt ut, frist: 27/4.

Anna?

② Kjapp repetisjon:

Invertering og determinant

– Begge: Berre relevant for kvadratiske matriser.

Kva gjeld for A^{-1} $\boxed{?}$

$\hookrightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = I$

Kva er I $\boxed{?}$

→ Identitetsmatrisa,

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ...

Spesielt: $IA = A$, $BI = B$

– Liknar på talet 1.

det A: Eit <u>tal</u>, ikkje ei matrise.

For: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{12}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

– „Kryss og tvers"-regel for determinantar til 3×3-matriser

Korleis bestemmer vi invers-matriser (og determinantar) i praksis?

→ Rekkereduksjon:

$(A \mid I) \sim \ldots \sim (I \mid A^{-1})$

Og dersom vi ikkje klarar å rekke-redusere A til I $\boxed{?}$

↳ A er ikkje invertibel; matrisa har ikkje nokon invers.

Eksempel

a) Bestem inversmatrisene til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 17 \end{pmatrix}$$

b) Løys likningane

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Bestem matrisa X som oppfyller

$$C\,X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

d) Bestem alle matriser X som oppfyller

$$B\,X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

---

a) $$(A \mid I_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{5} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = (I_2 \mid A^{-1})$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Merk:

For 2×2-matriser har vi ein eksplisitt formel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\boxed{?} \rightarrow$ determinanten

- gjeld så lenge $ad-bc$, determinanten, er ulik null.

Sjekk:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2\cdot(-1)-3\cdot 1} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$ (Same svar:)

$$(B \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} -4 \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ +4 \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Kan aldri få I_3 her.

B er <u>ikkje</u> invertibel

$$(G \mid I_3) = \begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 17 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} -4 \\ \quad 4 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3 \quad -7 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & -28 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 12 & -11 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{1}{2} \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 29 & -28 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 4 & 1 \end{array}\right) = (I_3 \mid G^{-1})$$

Svar:

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -28 & -7 \\ 6 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontroll:

$$\begin{pmatrix} 29 & -28 & -7 \\ 6 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 17 \end{pmatrix} \overset{\text{MATLAB}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Evt.:
```
>> G=[1 0 7; 0 2 3; 4 -8 17];
>> inv(G)
```

b) $A\vec{x}=\vec{b}$ — Lov å gjere det same på begge sider

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_2}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$ ← NB: Gongar frå venstre

I_2, $I_2\vec{x} = \dots$ $\boxed{?}$ ↳ $\vec{x}$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$ ← NB: Eintydig løysing

Første likning:

$$\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\cdot 3+3\cdot 1\\ 1\cdot 3-2\cdot 1\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}}$$

Andre likning:

$$\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\ 2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-7+6\\ -7-4\end{pmatrix} = \underline{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-13\\ -11\end{pmatrix}}$$

c)

$$G X = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ -4 & 12\end{pmatrix}$$

$\boxed{?}$ Kva format må X ha?
↳ 3×2

$$G^{-1}\cdot G X = G^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ -4 & 12\end{pmatrix}$$

$$X = G^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ -4 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}29 & -28 & -7\\ 6 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2}\\ -4 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ -4 & 12\end{pmatrix}$$

$$= \dots = \underline{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

3 Å rekne ut determinanten:

Rekkeoperasjonar:

1) Om vi gangar ei rekke med eit tal, blir determinanten ganga med det same talet.

2) Om vi byter om to rekker, endrar determinanten forteiken.

3) Om vi legg eit multiplum av ei rekke til ei anna, endrar ikkje dette determinanten.

Kvifor er dette nyttig?
Fordi determinanten til ei triangulær matrise er lik produktet langs diagonalen.

Triangulær matrise: Kvadratisk matrise der alle tala under (eller alle tala over) diagonalen er null.

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & \pi & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Påstand:

$$\left.\begin{array}{l}\det A = 1\cdot 3 = 3 \\ \det B = 4\cdot 2\cdot 1 = 8\end{array}\right\}$$ Stemmer med reglar vi har lært før.

$$\det C = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$$

Eksempel

Rekn ut determinantane til dei kvadratiske matrisene frå førre eksempel ved rekkereduksjon

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -5$$

Alternativt:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} -2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-1\cdot 5 = \underline{-5}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 16 + 0\cdot 3\cdot 4 + 7\cdot 0\cdot(-8) -$$

$$1\cdot 3\cdot(-8) - 0\cdot 0\cdot 16 - 7\cdot 2\cdot 8 = \text{(giesp)} = 0.$$

Betre:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 16 \end{vmatrix} -4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -12 \end{vmatrix} 4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$-8-$

$1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{2} \quad (\neq 0)$$

- Metoden kan også brukast på større matriser.

Merk: Når vi ved hjelp av rekkeoperasjonar har fått fram ei triangulær matrise,

$$\begin{vmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & * \end{vmatrix},$$

a) har vi leiande tal i kvar søyle.

eller

b) minst ein null langs diagonalen.

Tilfelle a): $\det A \neq 0$, rekkeoperasjonane kan endre determinanten, men ikkje gjere han til null

b) $\det A = „* \cdot * \cdot 0 \cdot *" = 0$

④ Litt teori; oppsummert

$A \sim I \iff \det A = 0,$

som igjen gir at **A er invertibel hvis og berre hvis $\det A \neq 0$.**

Vi har erfart at mange påstandar går ut på det same her:

For ei kvadratisk ($n \times n$-) matrise A:

- A kan rekkereduserast til ei matrise med leiande tal i kvar søyle

$$\Updownarrow$$

- A kan rekkereduserast til I_n

$$\Updownarrow$$

- A er invertibel (A^{-1} finst)

$$\Updownarrow$$

- Likninga $A\vec{x} = \vec{b}$ har alltid eintydig løysing ($\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$)

$$\Updownarrow$$

- $\det A \neq 0$

Eksempel: Gjensyn med oppg. 5c frå eksamen gitt i august 2013:

Bestem dei verdiane av k som gjer at dette likningssystemet har eintydig løysing:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sist: Rekkereduserte totalmatrisa.

Enklare (?): Eintydig løysing

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4k(k-1)+0+0-4\cdot 6\cdot 1-0-0 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$4k^2-4k-24 \neq 0 \Leftrightarrow k^2-k-6 \neq 0$$

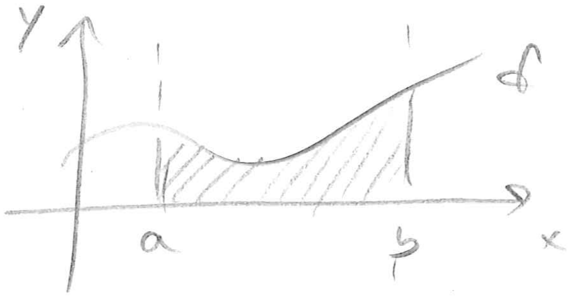
$$k \neq \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 5}{2}$$

$$k \neq \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{og} \quad k \neq \frac{1+5}{2} = 3$$

---

⑤ Integralet

For $f(x) \geq 0$ når $x \in [a, b]$ kan integralet $\int_a^b f(x)dx$ oppfattast som det skraverte arealet:



- Arealet avgrensa av x-aksen, linjene $x=a$ og $x=b$ og grafen til f.

(Når $f(x) < 0$, får arealet negative bidrag.)

[?] Så kvalitativt, kva er $\int_a^b f(x)dx$?

↳ Eit tal.

Av og til kan dette arealet bestemmast ved anti-derivasjon. Men gløym det for ei stund.

MATLAB-demo: PlottPartisjonRegulær.m

Eksempel

Bestem dette integralet med minst tre rette desimalar:

$$\int_{-2}^{2} \cos \frac{x^2}{3} \, dx$$

→ Implementering: RiemannInt.m

NB: Gjenta utrekninga med høgare og høgare N heilt til dess tre desimalar blir verande uendra!

Det vi har implementert no, er ein metode for å estimere integral numerisk. Det er også definisjonen av integralet.