DAFE 1000 23/3

① Innlevering i dag:

– Levere i raud boks vis à vis kontoret til Sølve – eller til Markus i rekneøvinga.

– På papir, innan fristen.

② $\boxed{?}$ Dersom A har formatet $k \times l$ og B er ei $m \times n$ - matrise, kva skal til for at produktet AB er veldefinert? Og kva format får AB?

→ $\quad A \quad\quad B$

$\quad\; k \times l \quad m \times n$

like

format for AB

Eksempel

Løys desse to likningssystema

$A\vec{x} = \vec{b}$ og $A\vec{x} = \vec{c}$ der $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Poeng: Når vi set opp totalmatrisa og rekkereduserar, kjem vi til å gjere dei same rekkeoperasjonane to gonger evt. (i alle fall om løysinga er eintydig).

Betre: Sette opp ei stor, felles totalmatrise:

$$(A\,|\,\vec{b}\,|\,\vec{c}) = \begin{pmatrix}4&2&4&1\\3&1&-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -1\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&5&-2\\3&1&-1&3\end{pmatrix}\begin{matrix}-3\\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&1&5&-2\\0&-2&-16&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow -\frac{1}{2}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&5&-2\\0&1&8&-\frac{9}{2}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -1\end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&5/2\\0&1&8&-9/2\end{pmatrix}$$

Løysing av $A\vec{x} = \vec{b}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\8\end{pmatrix}$

— " — $A\vec{x} = \vec{c}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5/2\\-9/2\end{pmatrix}$

③ Invertering

- Har definert summar og differansar av matriser („A − B" betyr „A + (−1)B").
- Har definert produkt av matriser

$\boxed{?}$ Kva manglar?

→ Division.

Det finst ikkje; vi snakkar aldri om matrise division.

Men vi har noko som liknar.

For tal: Når vi skriv „a − b" betyr det altså $a + (-b)$.

Når vi skriv „a/b" betyr det eigentleg „$a \cdot \frac{1}{b}$", $\frac{1}{b}$: Inversen til b (definert for alle tal ulik 0).

For matriser: Har invers – i visse tilfeller:

matr.

$\frac{1}{b} = b^{-1}$ er definert ved at

$AI = IA = A$
tilsvarar
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b \overset{\boxed{?}}{=} 1,$

tal

$\boxed{?}$ Har vi noko matrise som „liknar" på 1?

→ Ja, I_n – identitetsmatrisa

Definisjon

For ei $n \times n$-matrise A:

Dersom det finst ei matrise B som oppfyller at $AB = I_n$ (og $BA = I_n$), seier vi at A er invertibel og B er inversmatrisa til A, $B = A^{-1}$.

Kommentarar:

- Inversen er berre definert for kvadratiske ($n \times n$-) matriser.

- Kan vise at dersom $AB = I_n$, er også $BA = I_n$ (ikkje opplagt).

- A er inversmatrisa til B; $(A^{-1})^{-1} = A$

- Ikkje alle kvadratiske matriser er invertible.

„Eksempel"

Bestem inversmatrisene for $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Skal ha $\underline{X} = (\vec{x}_1 | \vec{x}_2)$ som er slik at

$$A\underline{X} = I_2 \ , \quad A(\vec{x}_1 | \vec{x}_2) = I_2 \ , \quad (A\vec{x}_1 | A\vec{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Som i eksempelet: Lager <u>stor</u> totalmatrise

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underbrace{}_{A} \ \underbrace{}_{I_2} \quad -1 \quad \overset{\text{(Som før)}}{\sim} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} -1 \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} -3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow -\tfrac{1}{2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 \end{matrix}}_{X = A^{-1}}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Kontroll: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 4-4 \\ -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

Ok

MATLAB:
```
>> A = [4 2; 3 1];
>> inv(A)

   -0.5    1
    1.5   -2
```

For B:

$$(B | I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \ -3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} -1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$\uparrow$

Manglar leiande tal

– Inga løysing.

B er ikkje invertibel; ho har ikkje nokon invers.

Metode for å finne A^{-1}:

– Set opp totalmatrisa $(A \mid I_n)$

– Prøv å rekkereducere til du har I_n til venstre.

- Dersom det går, har du no matrisa $(I_n \mid A^{-1})$
- Dersom det ikkje går, har ikkje A nokon invers.

– Kan (også) bruke determinanten for å sjekke om ei matrise er invertibel.

④ Determinanten

- Definert for alle kvadratiske matriser
- Er eit tal (for ei gitt matrise).

- Determinanten kan definerast slik:
  - Lag alle moglege produkt av element der ingen av elementa er frå same rekke eller søyle.
  - Avengig av rekkefølga på rekkene / søylene til elementa, skal produktet i visse fall gangast med -1.
  - Legg så saman alle produkta.

Eksempel

Rekn ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

A: Berre to moglege produkt:

$4 \cdot 1$ og $2 \cdot 3$

$4 \cdot 3$: Same søyle, $4 \cdot 2$: Same rekke

Med $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $4 \cdot 1$ tilsvarar $a_{11} \cdot a_{22}$ $1,2 \to +$

$2 \cdot 3$ — " — $a_{12} \cdot a_{21}$ $2,1 \to -$

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1 - 2\cdot 3 = 4-6 = \underline{-2} \quad (\neq 0)$$

Rette Strekar

For B: Mange moglege kombinasjonar

[?] Kor mange?

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Om vi tar det rekkevis:

$$b_{1k} \cdot b_{2l} \cdot b_{3m}$$

k, l, m; søylenummera, må vere ulike.

3 val for k, gir 2 igjen for l og 1 for m

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ moglege kombinasjonar

n: Byter plass med naboen n gonger for å få „1,2,3"

$$\left.\begin{array}{ll} b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} & 0 \\ b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} & 2 \\ b_{13} \cdot b_{21} b_{32} & 2 \end{array}\right\} \text{Partal, } +$$

$$\left.\begin{array}{ll} b_{11} b_{23} b_{32} & 1 \\ b_{12} b_{21} b_{33} & 1 \\ b_{13} b_{22} b_{31} & 3 \end{array}\right\} \text{Oddetal, } \div$$

For 3×3-matriser:

$$\begin{array}{ccc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{31} & b_{32} \end{array}$$

$-$ $+$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = +1\cdot 3\cdot 7 + 2\cdot 4\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 5 - 3\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 7$$

NB! Eit tal, <u>ikkje</u> ei matrise

$$= 21 + 24 + 30 - 27 - 20 - 28$$

$$= 75 - 75 = 0$$

Merk: A, som vi fann inversen til i stad, har determinant -2 $(\neq 0)$.

B, som viste seg å ikkje ha nokon invers, har determinant 0.

Slik er det generelt:

Ei kvadratisk matrise A er invertibel viss, og berre viss, $\det A \neq 0$

Eksempel

Bruk A^{-1} frå førre eksempel til å løyse dei to likningane frå eksempelet før, altså $A\vec{x}=\vec{b}$ og $A\vec{x}=\vec{c}$ der

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix},\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Fann at $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}$ i stad

$A\vec{x}=\vec{b}$ — Har lov å gjere det same på begge sider

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

$$I_n\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{2}-1\\ \frac{3}{2}\cdot4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ 8\end{pmatrix}$$

For $A\vec{x}=\vec{c}$:

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{c}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}+3\\ \frac{3}{2}-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5/2\\ -9/2\end{pmatrix}$$

Moral:

Likningssystemet $A\vec{x}=\vec{b}$, der A er kvadratisk, har (den eintydige) løysinga $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ – dersom A er invertibel.

Altså:

$\det A \neq 0 \iff A\vec{x}=\vec{b}$ har eintydig løysing.

Eksempel – revisited:

Oppg. 5 c) frå eksamen aug. 2013, sjå s. 6 i notat frå 16/3.

Løysing:

$A\vec{x}=\vec{b}$ med $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & k & 6\\ 4 & 1 & k-1\end{pmatrix}$ skal ha eintydig løysing

$\iff \det A \neq 0$ (uavhengig av kva $\vec{b}$ er)

$$\det A = \begin{vmatrix}4 & 0 & 0\\ 2 & k & 6\\ 4 & 1 & k-1\end{vmatrix} = 4k(k-1)+0+0-4\cdot 6\cdot 1$$

$$-0-0 = 4k^2-4k-24 \neq 0 \iff$$

$$k^2-k-6 \neq 0 \iff k \neq \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 5}{2}$$

$$k \neq \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{og} \quad k \neq \frac{1+5}{2} = 3$$