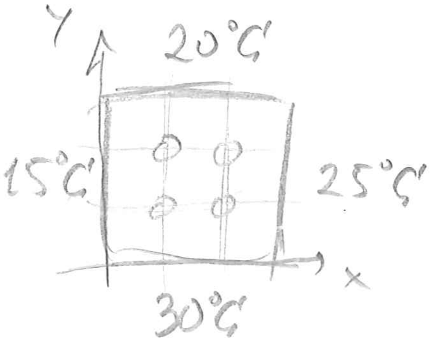
# DAFE1000 19/3

(1) Denne veka: André erstattar Sølve
Innlevering på fredag.
Hugs å levere til Markus på <u>papir</u> innan fristen.
(Kan også levere i raud eske vis à vis kontoret til Sølve, PS234.)

(2) Eksempel på bruk av lineære likningssystem

<u>Eksempel</u>: Temperaturfordeling på ei metallplate




– Fikserte temperaturar på kantane.

– Vil finne finne temperaturfordelinga på plata, $T(x,y)$.

(Vise plott av „eksakt" fordeling)

Dette kan vi gjere tilnærmd slik:

- Del plate inn i kvadratiske ruter
- Gå ut frå at temperaturen i kvart punkt er lik gjennomsnittet av naboane over, under og på sidene.

Kva blir dei fire temperaturane merkert i figuren?

For $T_1$:

Skal ha: $T_1 = \frac{1}{4}(15 + 20 + T_2 + T_3)$ (gjennomsnitt)

$$4T_1 - T_2 - T_3 = 35$$

For $T_2$:

$$T_2 = \frac{1}{4}(20 + 25 + T_4 + T_1)$$

$$-T_1 + 4T_2 \quad - T_4 = 45$$

Tilsvarande:

$$-T_1 + \quad 4T_3 - T_4 = 45$$

$$-T_2 - T_3 + 4T_4 = 55$$

Alt i alt:

$$\begin{aligned} 4T_1 - T_2 - T_3 \quad &= 35 \\ -T_1 + 4T_2 \quad - T_4 &= 45 \\ -T_1 \quad + 4T_3 - T_4 &= 45 \\ -T_2 - T_3 + 4T_4 &= 55 \end{aligned}$$

eller

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 45 \\ 45 \\ 55 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 & 35 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 45 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 45 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 55 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{MATLAB}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 22.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 22.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 25 \end{pmatrix}$$

$T_1 = 20, \quad T_2 = T_3 = 22.5, \quad T_4 = 25$

By the way (ikkje pensum):

- Det blir fort uaktuelt å løyse det som eit likningssystem når vi lagar finare oppdeling.
- Betre: Gjere det iterativt; lås kant-temperaturane, start med ei tilfeldig fordeling og erstatt kvar temp. med gjennomsnittet av naboane – igjen og igjen.

→ Kap. 15 i numerikk-boka

Demo: Temperaturfordeling.m

Eksempel

Tenk deg at du bruker å ete brød med jordbærsyltetøy til frukost - i tillegg til å drikke heilmjølk [melk].

Næringsinnhaldet i desse varene, målt i g per hg (100g), er:

| | Karbohydrat | Feitt | Protein |
|---|---|---|---|
| Syltetøy | 14.3 | 0.2 | 0.4 |
| Brød | 54 | 3.3 | 11 |
| Mjølk | 4.5 | 3.5 | 3.4 |

a) Om du ønsker at frukosten din skal innehalde 170 g karbohydrat, 19 g feitt og 35 g protein, kor mykje må du ete av kvar vare?

b) Kva "diettbar" er ok om du i tillegg har smør på brødet?
Her kan vi rekne smør for å vere reint feitt.

Vi tenkjer oss næringsinnhaldet som ein vektor i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 170 \\ 19 \\ 35 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Karboh. i gram} \\ \leftarrow \text{Feitt} \ \text{—"—} \\ \leftarrow \text{Protein} \ \text{—"—} \end{array}$$

Om vi lar $x_1$ vere talet på hg sylte-tøy, $x_2$ tilsvare brød og $x_3$ mjølk, skal lineærkombinasjonen

$$x_1 \begin{pmatrix} 14.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 54 \\ 3.3 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3.5 \\ 3.4 \end{pmatrix}$$

vere lik $\vec{b}$ over:

$$x_1 \begin{pmatrix} 14.3 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 54 \\ 3.3 \\ 11 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4.5 \\ 3.5 \\ 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ 19 \\ 35 \end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{array}{l} \text{Karb.} \rightarrow \\ \text{Feitt} \rightarrow \\ \text{Prot.} \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 14.3 & 54 & 4.5 \\ 0.2 & 3.3 & 3.5 \\ 0.4 & 11 & 3.4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{Sylt.} & \text{Brød} & \text{Mjølk} \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 170 \\ 19 \\ 35 \end{matrix}$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 14.3 & 54 & 4.5 & 170 \\ 0.2 & 3.3 & 3.5 & 19 \\ 0.4 & 11 & 3.4 & 35 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{MATLAB}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.14 \\ 0 & 1 & 0 & 2.04 \\ 0 & 0 & 1 & 3.33 \end{pmatrix}$$

Dietten bør bestå av 3.1 hg syltetøy, 2.0 hg brød og 3.3 hg mjølk.

b) Ny variabel: $x_4$ — talet på kg smør.
Reint feitt (ikkje heilt sant): $\sim \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ny totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 14.3 & 54 & 4.5 & 100 & 170 \\ 0.2 & 3.3 & 3.5 & 0 & 19 \\ 0.4 & 11 & 3.4 & 0 & 35 \end{pmatrix} \sim \underset{\dots}{\overset{\text{MATLAB}}{\sim}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7.86 & 3.14 \\ 0 & 1 & 0 & -0.21 & 2.04 \\ 0 & 0 & 1 & -0.25 & 3.33 \end{pmatrix}$$

Løysing:

$x_1 = 3.14 - 7.86\, x_4$

$x_2 = 2.04 + 0.21\, x_4$

$x_3 = 3.33 + 0.25\, x_4$

- Mange moglege kombinasjonar. $x_4 = 0$ gir svaret frå a.

Men: Vi må levere at alle $x_i$-ane $\geq 0$

( $\boxed{?}$ Kvifor?)

$x_1 \geq 0 \iff 3.14 - 7.86\, x_4 \geq 0 \iff x_4 \leq \frac{3.14}{7.86} = 0.40$

Altså kan vi ikkje ta med meir enn 0.40 kg = 40 g smør. (Det held vel...)

## (3) Matrise-aritmetikk

– Dette har de alt lært i diskret matematikk-kurset.

– Når vi legg saman matriser og gangar dei med tal (skalarar), er det akkurat sånn som ein skulle tru:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 0-2 & 7+3 \\ 4-4 & 3+2 & -1+7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 3 & 4\cdot 4 \\ 4\cdot 0 & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 1 & 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 0 & 8 \\ 4 & 32 \end{pmatrix}$$

Merk: For at summen $A+B$ skal vere veldefinert, må matrisene $A$ og $B$ ha same format – altså ha like mange rekker og like mange søyler.

Multiplikasjon av matriser er ikkje definert tilsvarande.

## Definisjon

Om $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ er søylene i matrisa $B$, $B = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \dots | \vec{v}_n)$, er produktet $AB$ definert som

$$AB = (A\vec{v}_1 | A\vec{v}_2 | \dots | A\vec{v}_n).$$

Rep.: Matrise-vektor-produktet $A\vec{x}$, der $A = (\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \dots | \vec{u}_p)$ og $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, er

$$A\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \dots + x_p\vec{u}_p$$

I praksis: Brukar „kryss-og-tvers"-ganging (evt. med tabellar $\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & \end{array}$ – om ein synest det blir enklare).

## Eksempel

For $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, rekn ut produktet $AB$ – både etter definisjonen og med rekneregelen vi brukar i praksis.

Med $B = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2)$ er $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 0 - 2 \\ 2\cdot 4 + 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = (A\vec{v}_1 | A\vec{v}_2) = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}}$$

Alternativt: $AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 3\cdot 0 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) & 4\cdot 0 + 1\cdot 3 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}}$$

I MATLAB: >> A * B → Vis

uten punktum

## Eksempel

Desse matrisene er gitte:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ og } C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rekn ut følgande matriser; dersom dei er udefinerte, skal du kort forklare kvifor:

$2A$; $A+B$, $A+3B^T$, $BA$, $BC$, $CB$

$$2A = 2\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}6 & 0 & 4\\ 8 & 2 & 0\end{pmatrix}}$$

$A+B$: Ikkje definert då $A$ og $B$ har ulike format.

$B^T$: „T" står for transponering – altså at vi „flippar om" på kva som er søyler og rekker

$$B^T = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

. I MATLAB: >>B.'

↑ Apostroff

$$A + 3B^T = \begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}^T =$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+3\cdot 2 & 0+3\cdot 1 & 2+3\cdot(-1)\\ 4+3\cdot 0 & 1+3\cdot 3 & 0+3\cdot 1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix}9 & 3 & -1\\ 4 & 10 & 3\end{pmatrix}}$$

$$BA = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3+0 & 0+0 & 2\cdot 2+0\\ 3+3\cdot 4 & 0+3 & 2+0\\ -3+4 & 0+1 & -2+0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6 & 0 & 4\\ 15 & 3 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

→ Kontrollere i MATLAB?

Merk: Vi rekna ut $AB$ i stad, $AB = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 9 & 3\end{pmatrix}$, $AB$ og $BA$ er <u>ikkje</u>

like; dei har ikkje ein gong same format.

– Stor forskjell mellom matriser og tal.

## ④ Identitetsmatrisa

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

← $n \times n$-matrise; kvadratisk

<u>Diagonal</u>: Alle tala som ligg langs diagonalen (frå oppe til venstre til nede til høgre) er null.

Her er alle desse 1 i tillegg.

Særtilfeller:

$I_1 = (1)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ etc.

I MATLAB: >> eye(3)

[?] Kva er spesielt med denne, då?

## Eksempel

a) For $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, rekn ut

$I_2 A$, $A I_3$ og $B I_2$.

b) Vis at $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

---

a) $$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 0\cdot 4 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0 \\ 0+4 & 0+1 & 0+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 0 + 0 & 0 + 0\cdot 1 + 0 & 0 + 0 + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 0 + 0 & 0 + 1\cdot 1 + 0 & 0 + 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$B I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 0 & 0+0 \\ 1+0 & 0+3 \\ -1+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Generelt: $A I_n$ og $I_m A$ er alltid lik $A$ (når produktet er veldefinert; $A$ er ei $m \times n$-matrise).

b) $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 - 3\cdot 1 & -2\cdot 3 + 3\cdot 2 \\ 2 - 2 & -3 + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Det betyr at $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Meir om det på fredag.