DAFE1000 16/3

① Beskjeder/info?

② Vektorar: Her er dei $n \times 1$-matriser - søyler

Eksempel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2.1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$

- Repetere kva ein lineær-kombinasjon (av vektorar) er og fullføre eksempel s. 9, 10 i notat frå 12/3.

③ Matrise-vektor-produkt

- Definisjon og eksempel
- Sjå s. 11, 12 i notat frå 12/3.

(4) Tre måtar å skrive likningssystem på:

Eksempel

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5$$
$$-x_1 - x_2 + 3x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Ukjende: x_1, x_2, x_3 – alt. : x, y, z

Som vektor; dei må vere like – element for element:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineær-kombinasjon:

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrise-likning:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ med koeffisient-matrise

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Totalmatrise:

$(A \mid \vec{b})$

Eksempel: Side 7 i eksempel-notat

Løysing:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a)

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Altså: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

– Bestemmer om/korleis $\vec{b}$ kan skrivast som ein lineær-kombinasjon av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ og $\vec{v}_3$.

b) $A\vec{x} = \vec{b}$, same $\vec{b}$

$$A = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

x_3 fri

c) Totalmatrise:

$$(A | \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{MATLAB}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + 3x_3 = 4$

$x_2 - 2x_3 = -2$

x_3 er fri

$x_1 = 4 - 3x_3$
$x_2 = -2 + 2x_3$
x_3 er fri

Løysinga kan godt bli gitt på vektor-form:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3x_3 \\ -2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geometrisk: Linje i rommet, går gjennom punktet $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og er parallell med vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

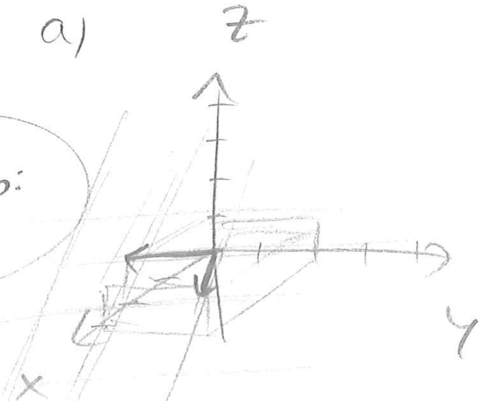
(-Vi er litt pragmatiske når det gjeld forskjellen mellom punkt og vektorar. Er det forskjell, forresten?)

Eksempel: Side 8 i eksempel-notat

Løysing:

MATLAB-demo: PlotSpan.m

a)



Alle punkt av typen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \cdot \vec{v}_1 + t \cdot \vec{v}_2$:
Plan i rommet gjennom origo $(s=t=0)$

b) Finst det ein s og ein t slik at

$s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2 = \vec{b}$?

$A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \vec{b}$, med $A = (\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Totalmatrise:

$$(A \mid \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ingen leiande tal i siste søyle; likninga har løysing. Altså: $\vec{b}$ ligg i dette planet.

- Kan også bestemme korleis $\vec{b}$ er ein lineærkombinasjon av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} s = 3 \\ t = -2 \end{matrix}$$

$$3\vec{v}_1 + (2)\vec{v}_2 = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 0-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Eksempel: Oppg. 5c frå eksamen aug. 2013:

Bestem dei verdiane av k som gjer at dette likningssystemet har eintydig løysing:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & k & 6 \\ 4 & 1 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & k & 6 & 1 \\ 4 & 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & k & 6 & 1 \\ 0 & -2k & -12 & 0 \\ 0 & -2k+1 & k-13 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 6 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & -1 \\ 0 & -2k & -12 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2k \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & k & 6 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2k^2-2k-12 & -2k \end{pmatrix}$$

Eintydig: $2k^2-2k-12 \neq 0 \iff$

$$k^2-k-6 \neq 0$$

$$k \neq \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$k \neq \frac{1-5}{2} = -2 \quad \text{og} \quad k \neq \frac{1+5}{2} = 3$$

– Skal gjere dette litt enklare neste veke :)

5 Rekkereduksjon: Ein algoritme

Å få ei matrise på redusert trappeform

Eksempel

A Undersøk om søyle 1 har tal ulike 0.

Hvis ja:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 & 0 \\ -2 & 4 & -24 & 1 \\ 4 & -3 & 23 & -1 \\ -3 & 2 & -16 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Sørg for at eit av desse står øvst - evt ved å bytte rekker

$$a_1 \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 4 & -3 & 23 & -1 \\ -3 & 2 & -16 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow -\tfrac{1}{2}$$

3) Om talet er a_1 $(\neq 0)$. Gjer det til 1 ved å gange rekke 1 med $\frac{1}{a_1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 4 & -3 & 23 & -1 \\ -3 & 2 & -16 & 1 \end{pmatrix} \quad -4 \quad 3$$

4) Gjer alle tala under $(a_2, a_3, \dots)$ til null med å legge $-a_i$ gonger rekke 1 til rekke i

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & 1 \\ 0 & -4 & 20 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

5) Gå vidare til neste rekke

(B)

1) Gå vidare til neste søyle

2) Kopier den aktuelle undermatrisa

3) Gjenta sekvens (A) på denne undermatrisa

(A)

$$\begin{pmatrix} 3 & -15 & 0 \\ 5 & -25 & 1 \\ -4 & 20 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & -25 & 1 \\ -4 & 20 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 & 4 \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(B) $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow$ (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) 1) Gjenta (B) til du er kome fram til siste søyle

2) Kopier dei ulike blokkene inn i kvarandre tilbake til utgangspunktet

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrisa er no på trappeform, og alle leiande tal er 1.

(D) Bakover-fasen

1) For rekke r, den siste med leiande tal:

Legg $-a_i$ gonger rekke r til alle rekkene over

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 0\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

2) Gjenta 1) for rekke $r-1, r-2, \dots, 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \\ \\ \\ \end{array}$$

- Også her kunne vi ha gjort det meir ved å berre jobbe på dei aktuelle underblokkene.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Merk: Oppg. 3 er enklare:
- n likn. i n ukjende
- stoppar dersom dei n første søylene ikkje har leiande tal.

- Kan også gjerast mykje enklare:

6 „Preview":

Determinant og invers

For ei $n \times n$-matrise A

↑ Kvadratisk

$A\vec{x} = \vec{b}$ — likningssystem

Løysing: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, A^{-1}: Invers-matrisa til A.

Den eksisterar hvis, og berre hvis, determinanten til A, $\det A$, er ulik null

I MATLAB:

A^{-1}: >> inv(A)

$\det A$: >> det(A)

Neste veke: Forklarar kva determinant og invers er.