DAFE 1000 12/3

① Beskjerdar/info?

② Eksempel

- Løys desse likningssystema og beskriv løysinga geometrisk

a) $2x-3y=3$, $3x+6y=-6$ b) $2x-3y=3$, $-4x+6y=6$ c) $2x-3y=3$, $-4x+6y=-6$

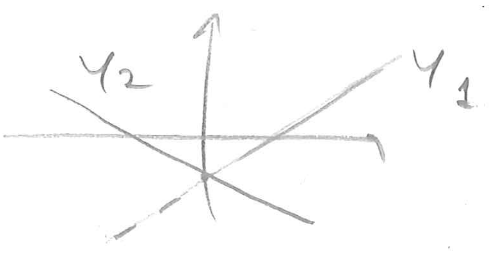
a) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix} \leftarrow \tfrac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \leftarrow -\tfrac{1}{7} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} -2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = 4/5, \quad y = -7/5$$

Plotter i MATLAB: $y_1 = \frac{2}{3}x - 1$

$y_2 = -\frac{1}{2}x - 1$



b) Totalmatrise:

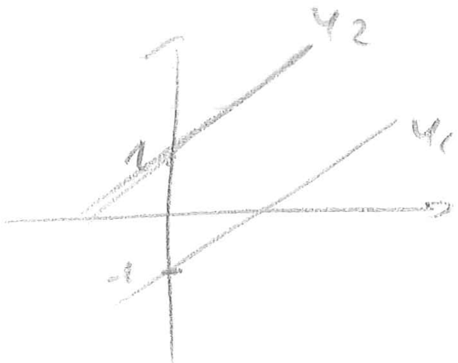
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Siste rad: „$0x + 0y = 12$"

- Det finst ingen x-ar og y-ar som oppfyller dette.

Plottar i MATLAB: $y_1 = \frac{2}{3}x - 1$

$y_2 = \frac{2}{3}x + 1$



c) Totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siste rad: „$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$"

- Det finst ingen x-ar og y-ar som ikkje oppfyller dette.

Likning 2 inneheld same informasjon som likn. 1, $y_2 = y_1 = \frac{2}{3} - 1$

- Linjene ligg oppå kvarandre; vi har uendeleg mange løysingar.

Redusert trappeform

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \frac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y$$

Løysing:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}y$$

y er fri

– Kvifor er det $\underline{y}$ som er fri og ikkje x $\boxed{?}$

→ Fordi x har eit leiande tal, ikkje y. (Semantikk).

③ Geometri med tre ukjende

$ax + by + cz = d$

– Likning for eit plan i rommet.

Om vi skal oppfylle tre slike likningar samtidig: Må finne skjeringspunktet mellom tre plan

I utgangspunktet skal der vere eitt – men ikkje alltid

→ Figurar for tre situasjonar

Eksempel

Løys desse likningssystema:

a) $2x - y + z = 0$
$2y - z = 1$
$x - 4y + 3z = 1$

b) $2x - y + z = 0$
$2y - z = 1$
$4x - 4y + 3z = 1$

c) $2x - y + z = 0$
$2y - z = 1$
$4x - 4y + 3z = -1$

---

a) Totalmatrise

evt: $-\frac{7}{2}$ gonger rekke 2 til rekke 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \leftarrow \frac{1}{3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 4 \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 11/3 \end{pmatrix}$$

$x = -\frac{2}{3}$
$y = \frac{7}{3}$
$z = \frac{11}{3}$

– Eintydig løysing

b) Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1 \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Leiande tal i søyle lengst til høgre:
  - Inga løysing ("inkonsistent")

c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 1 \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{1}{2} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ 1 \\ \end{array} \sim$$

Ingen leiande tal; vi har løysing

Ingen leiande tal; z ubestemt

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + \frac{1}{4} z = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} z$

$y - \frac{1}{2} z = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z$

z er fri $\qquad$ z er fri

④ Eksempel:
Diskutere diverse påstandar; sjå eige eksempel-notat

a) Nei, det kan framleis vere ingen eller uendeleg mange løysingar

b) Totalmatrise: $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$

– Maks tre leiande tal, kan ikkje ha eit leiande tal for alle fire ukjende.
Men: Det kan vere inkonsistent

c) Ja, det er sant.

d) Feil, vi kan ha fleire likningar enn ukjende

e) Sant

f) Ikkje leiande tal i siste søyle: Har løysing
Manglar også i ei av dei andre søylene: Tilsvarande ukjend er fri; vi har uendeleg mange løysingar.

For eit lineært likningssystem:

– Alltid eitt av desse tre alternativ:

1) Ei løysing
2) Inga løysing
3) Uendeleg mange løysingar

– Vi kan altså ikkje ha nøyaktig to løysingar for eit lineært likningssystem – slik vi kan for t.d. ei andregradslikning.

Eksempel

Gitt likningssystem:

$$2x + ay = b$$
$$x - y = 3$$

Kva må parametrane a og b vere for at likningssystemet skal ha uendeleg mange løysingar?
Når har det eintydig løysing?
Når har det inga løysing?

Totalmatrise

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & b & 9 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{cccc} x & y & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & -1 & 3 \\ 0 & a+2 & b-6 \end{array}\right)$$

Dersom $a+2 \neq 0$: Leiande tal for både x og y; eintydig løysing

Dersom $a+2=0$ og $b-6 \neq 0$: Leiande tal lengst til høgre; inga løysing.

Dersom $a+2 = b-6 = 0$: Har løysing, men y er fri.

For å ha uendeleg mange løysingar, må vi krevje at $\underline{a=-2 \text{ og } b=6}$.

Eintydig: $\underline{a \neq -2}$ (uavhengig av b)

Inga løysing: $\underline{a=-2 \text{ og } b \neq 6}$.

⑤ Lineær-kombinasjonar og matrise-vektor-produktet

For eit sett med vektorar, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, er ein lineær kombinasjon definert slik:

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$$

Merk: I dette kurset skal vektorar vere <u>søyler</u>.

<u>Eksempel</u>

For desse vektorane: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, avgjer om $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ kan skrivast som ein lineærkombinasjon av desse.

Altså: finst det ein x_1, x_2, x_3 som gjer at $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{b}$?

Merk: $\vec{v}$-ane har fire reelle element;
vi seier at dei ligg i $\underline{\mathbb{R}^4}$ („R-fire")

Tilsvarande: $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix}-3+i\\2i\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$

Vektorrom

Skal ha:

$$x_1\begin{pmatrix}4\\-2\\3\\8\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}5\\-7\\8\\9\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

$\boxed{?}$ Kva trur du; går det?
(Neppe...)

$$\begin{pmatrix}4x_1+5x_2-2x_3\\-2x_1-7x_2-2x_3\\3x_1+8x_2+x_3\\8x_1+9x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\4\end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{aligned}4x_1+5x_2-2x_3&=0\\-2x_1-7x_2-2x_3&=1\\3x_1+8x_2+x_3&=-2\\8x_1+9x_2&=4\end{aligned}$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 0 \\ -2 & -7 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & -2 \\ 8 & 9 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{MATLAB}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Leiande tal i siste søyle.

Likningssystemet har ikkje noko løysing.
$\vec{b}$ kan ikkje skrivast som ein lineærkombinasjon av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Definisjon: Dersom A har søylene $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ og $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, er produktet $A\vec{x}$ definert

som $A\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n$

Eksempel

Rekn ut $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Etter definisjon:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+0-6+0 \\ -6+16-16+0 \\ 3+28-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Enklare: Gange og plusse på kryss og tvers:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 3 + 0\cdot 4 + 3\cdot(-2) + 0\cdot 1 \\ -2\cdot 3 + 4\cdot 4 + 8\cdot(-2) + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 7\cdot 4 + 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 31 \end{pmatrix}$$

Frå tidlegare (?)

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 3 \\ & & & & 4 \\ & & & & -2 \\ & & & & 1 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 8 & 0 & -6 \\ 1 & 7 & 1 & 2 & 31 \end{array}$$

OK

Kontroll i MATLAB:

```
>> A=[3 0 3 0; -2 4 8 0; 1 7 1 2];
>> b=[3; 4; -2; 1];
>> A*b
```

NB: Ikkje „.*"

$\rightarrow$ 3
-6
31