DAFE 1000 9/3 -18

① Beskjeder / info ?

② Nytt tema – frå og med i dag og eit par veker: Lineær algebra

– „Matriser og sånn"

Matrise: Firkant med tal

Eksempel: $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -8 \\ 34 & 16.7 & 8 \\ 9 & -9 & 0 \\ 3 & 3.3 & 0.1 \end{pmatrix}$

– 4 rekker, 3 søyler

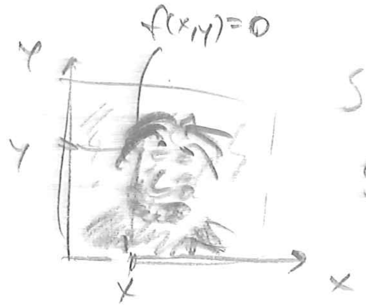
– ei 4x3-matrise

[?] Kvifor er matriser viktige?

- Bilder er matriser (vis bilde med pixlar)

Eit digitalt bilde er ei matrise - eller 3 for fargebilde
- jmf. det Henrik prata om i intro.-veka.

Henrik nemnde også at vi kan sjå på bilder som funksjonar



Svart/kvitt: $f(x,y)$ gir grånyansen i punktet (x,y) - eit tal mellom 0 og 1.

0: svart
1: kvit.

Når vi manipulerar bilde, brukar vi teori og teknikkar frå lineær algebra.

Eksempel: svd_demo.

-Alle matriser kan skrivast som

$$M = \sum_{n=1}^{N} p_n \vec{u}_n \vec{v}_n^T$$

, der $\vec{u}_n$ er ein søyle-vektor, $\begin{pmatrix} \cdot \\ \vdots \end{pmatrix}$, og $\vec{v}_n^T$ er ein rekkevektor $(\cdot \cdots)$.

Mange av p_n-ane er små. Korleis ser bildet ut om vi berre tar med dei viktigaste? → Demo

Matriser dukkar også ofte opp når vi skal løyse differensial likningar.

- Det skal vi sjå eksempel på.

- Har lært korleis vi legg saman og gangar saman matriser. Det kjem vi tilbake til. Men først:

③ Lineære likningssystem.

Lineær likning:

- Kan godt vere mange ukjende. Men det einaste ein får gjere med dei, er å gange dei med eit tal og legge saman.

Lineær likningar:

$$x + y = 0$$

$$2x + 3y - 4z = x + y$$

$$-4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 18$$

Ikkje lineære likningar:

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$3x + \sin y = 0$$

$$x \cdot y + 4y = 4x$$

Generelt skal vi jobbe med fleire likningar i fleire ukjende

Eksempel

Bestem den x og y som oppfyller

$$2x + 3y = 7 \qquad \text{I}$$

$$4x - 5y = 3 \qquad \text{II}$$

To måtar: a) Innsettingsmetoden

Løyser den eine for ein av variablane og set inn:

II: $4x - 5y = 3$, $y = \frac{4x-3}{5}$

I: $2x + 3 \cdot \frac{4x-3}{5} = 7$

$$2x + \frac{12}{5}x - \frac{9}{5} = 7$$

$$\frac{22}{5}x = 7 + \frac{9}{5} = \frac{44}{5}$$

$$x = \frac{44}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{22} = \underline{2}$$

II: $y = \frac{4x-3}{5} = \frac{4 \cdot 2 - 3}{5} = \underline{1}$

$\underline{x = 2,\ y = 1}$

$\boxed{?}$ Kor mange løysingar er dette?

b) Addisjonsmetoden:

Legg $-2 \cdot I$ til II:

$$\begin{array}{rcll} -4x - 6y &=& -14 & (-2 \cdot I) \\ 4x - 5y &=& 3 & II \\ \hline 0x - 11y &=& -11 & \text{Ny } II \end{array}$$

$I: 2x + 3y = 7$

$II: 4x - 5y = 3$

$-2 \cdot I + II$:

$I: 2x + 3y = 7$

$II: -11y = -11$

$-\frac{1}{11} \cdot II$:

$$-\frac{1}{11} \cdot (-11y) = -\frac{1}{11} \cdot (-11)$$

$$y = 1$$

$I: 2x + 3y = 7$

$II: y = 1$

$-3 \cdot II + I$:

$$\begin{array}{rcll} -3y &=& -3 & (-3II) \\ 2x + 3y &=& 7 & (I) \\ \hline 2x + 0 &=& 4 & \end{array}$$

$I: 2x = 4$

$II: y = 1$

$\frac{1}{2} \cdot I$:

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$x = 2$$

$I: x = 2$

$II: y = 1$

$\boxed{?}$ Omstendleg?

⇒ Ja, men

1) vi skal gjere det litt meir kompakt ved å bruke matriser

2) denne systematiske metoden er enklare å utvide til større problem.

- Så vi skal berre bruke addisjonsmetoden vidare.

- Men vi gjer det med meir kompakt notasjon.

„er rekkeekvivalent med"

Totalmatrise

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{11} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ -3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{2} \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

-Tilsvarar: $1 \cdot x + 0 \cdot y = 2$

$0 \cdot x + 1 \cdot y = 1$

$\underline{x = 2,\ y = 1}$

Læreboka kallar totalmatrisa for „den utvida matrisa", engelsk: „augmented matrix".

Eksempel

Bestem dei ukjende x, y og z som oppfyller

$$
\begin{aligned}
x + 2y + 3z &= 18 \\
-2x + 4y + z &= 27 \\
y + z &= 8.5
\end{aligned}
$$

Totalmatrise

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ -2 & 4 & 1 & 27 \\ 0 & 1 & 1 & 8.5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} 2 \\ \\ \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 8 & 7 & 63 \\ 0 & 1 & 1 & 8.5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ -8 \end{matrix}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 8.5 \end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8.5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 1 & 8.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ -3 \end{matrix}
\sim
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3.5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
$$

$x = -4, \; y = 3.5, \; z = 5$

Litt „namn på dyra":

Vi har nå løyst likningssystemet ved å rekkeredusere totalmatrisa til redusert trappeform.

- Metoden blir også kalla Gauss-Jordan-eliminering

To nye namn:

„Trappeform" og „redusert trappeform"

Trappeform:

- Det første talet ulik null i kvar rekke står alltid til venstre for tilsvarande tal i rekke under
- Eventuelle reine null-rekker står nederst.

Leiande tal („pivot" på engelsk):

Det første talet ulik null i kvar rekke i ei matrise på trappeform

Redusert trappeform:

- Trappeform
- Alle leiande tal er ein.
- Alle elementa <u>over</u> eit leiande tal er null.

Viser seg:

Når ei matrise blir rekkeredusert til redusert trappeform, er denne forma unik. Dersom to av oss kjem fram til ulike <u>reduserte</u> trappeformer, har (minst) ein av oss rekna feil.

- Det skjer lett!

Difor er det fint å kunne kontrollere resultatet i MATLAB med rref-funksjonen

↑ reduced row echelon form

NB: Læreboka krever at leiande tal må vere 1 for å ha trappeform. Det er dei ganske åleine om.

Viser:

Ny rekke

```
>> T = [1 2 3 18; -2 4 1 27; 0 1 1 8.5];
>> rref(T)
ans =

     1     0     0    -4
     0     1     0    3.5
     0     0     1     5
```

Eksempel

Kva for nokre av desse matrisene er på trappeform? Enn redusert trappeform?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	Trappeform	Redusert trappeform
A	Nei	
B	Ja	Ja
C	Nei	
D	Ja	Nei
E	Ja	Nei

4 Geometrisk tolking av løysinga

? Kva representerer ei slik likning – geometrisk?:

$$ax + by = c$$

evt. $by = c - ax$

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

– Linje i planet.

Løysinga av to lineære likningar i to ukjende kan vi oppfatte som skjæringspunktet mellom to linjer.

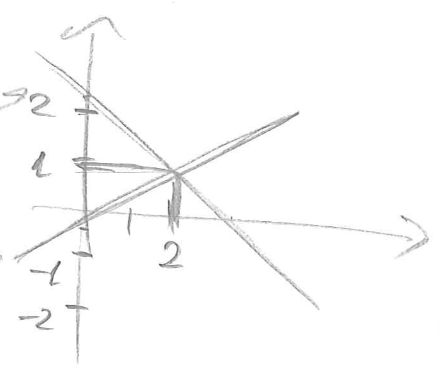
Det førre eksemplet:

$$2x + 3y = 7$$
$$4x - 5y = 3$$

Kan skrivast som

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$$

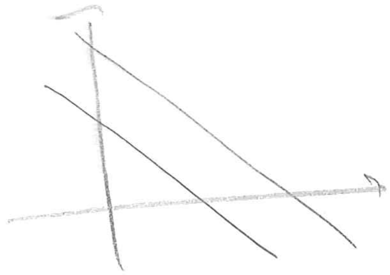


→ Plotte i MATLAB

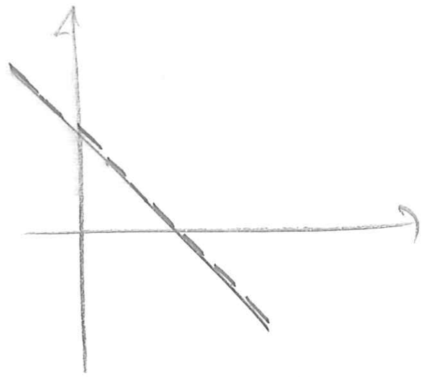
[?] Vil alltid to linjer i planet ha eitt skjeringspunkt?

Kva for andre scenario har vi?

→ Linjene kan vere parallelle eller ligge oppå kvarandre



Inga løysing



Uendeleg mange løysingar

Eksempel:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$$

Totalmatrise:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kva blir tilsvarande geometri med tre lineære likningar i tre ukjende?

Lineær likning:

$$ax + by + cz = d$$

- Plan i rommet
- Vise bilder for tre ulike scenario:
  - Eitt felles punkt
  - Ingen felles punkt
  - Felles linje