Førelesing DAFE 100, 5/3 -18

① Rep. frå sist:

Leibniz-notasjon: „$\frac{df}{dx}$" i staden for „$f'(x)$",

„$\frac{d}{dx}(x^2+\cos x)$" i staden for „$(x^2+\cos x)'$"

- Kjerneregelen ser nesten banal ut med denne skrivemåten:

Med $f(x) = \sin x^2 = \sin u$, der $u = x^2$:

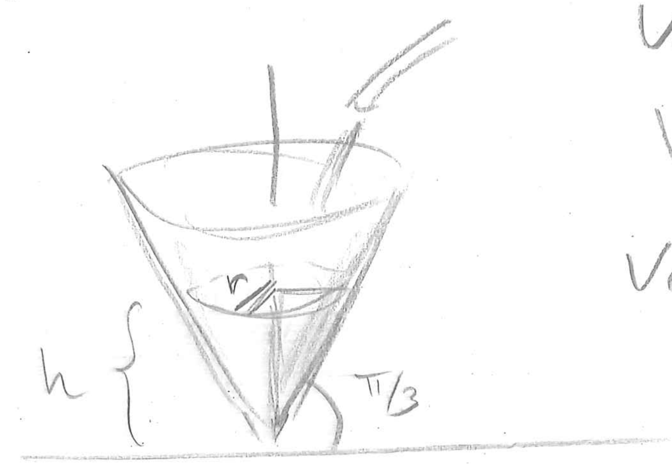
$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x$$

② Fullfører eksempel med fartsmåling, sjå dei siste sidene i notat frå 2/3.

③ Eksempel

Vatn renn ned i eit kjegleforma kar med farten 0.20 l/s. Kjegla står på høgkant, og kanten danner vinkelen $60° = \pi/3$ rad med golvet.

Kor fort aukar høgda på vassoverflata [vannoverflata] når høgda er 0.1 dm? Og når høgda er 2.0 dm?



Volum av vatn:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \quad \text{(Volum av kjegle)}$$

Vidare: $\frac{r}{h} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{9} h^3$$

– Både V og h er funksjonar av tid, $V(t)$ og $h(t)$. Har: $\frac{dV}{dt} = V'(t) = 0.20$

Derved har:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \frac{3\pi}{9} h^2 \cdot h'(t) = \frac{\pi}{3} h^2 \cdot h'(t)$$

$$h'(t) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{V'(t)}{h^2}$$

$h = 0.1$:

$$h'(t) = \frac{3}{\pi} \frac{0.20}{(0.1)^2} = \frac{60}{\pi} \approx \underline{19.1}$$

Eining [enhet]: $\frac{l/s}{dm^2} = \frac{dm^3/s}{dm^2} = \underline{dm/s}$

$h = 2.0$:

$$h'(t) = \frac{3}{\pi} \cdot \frac{0.20}{2.0^2} = \frac{0.15}{\pi} = \underline{0.0477}$$

Poeng: V og h er avhengige av kvarandre. Og begge er avhengige av tida.
Dermed er også farten som den eine endrar seg med, avhengig av farten som den andre endrar seg med:

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}} \quad \text{— kjerneregelen.}$$

Med lasermålinga: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

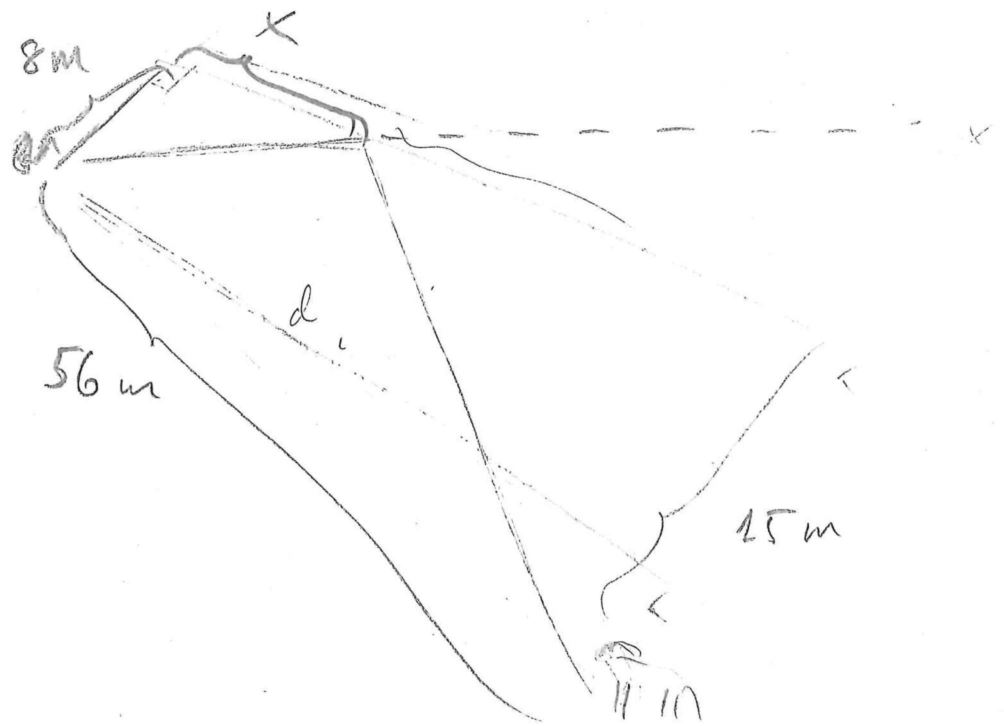
(4) Meir optimering

„Oppskrift"

Tekst → figur → namn på relevante storleikar [størrelser] → funksjonsuttrykk/likningar → derivere og finne nullpunkt → svar/konklusjon

Eksempel (jmf. 5.6.41 5))

Ein hest skal drikke vatn før han går og et havre. Hesten går først bort til ei rett elv, som ligg 15 m borte og drikk. Så går den bort til havren som står 8 m frå elva. Avstanden mellom hest og havre er 56 m.
Kva er den kortaste ruta hesten kan velge?



Pytagoras:

$$d = \sqrt{56^2 - (15-8)^2} = \sqrt{3087}$$

$$l(x) = \sqrt{15^2 + (d-x)^2} + \sqrt{8^2 + x^2}$$

Minimal l: $l'(x) = 0$

$$l'(x) = \frac{2(d-x)\cdot(-1)}{2\sqrt{15^2+(d-x)^2}} + \frac{2x}{2\sqrt{8^2+x^2}} =$$

$$\frac{x-d}{\sqrt{15^2+(d-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{8^2+x^2}} =$$

$$\frac{(x-d)\sqrt{8^2+x^2} + x\sqrt{15^2+(d-x)^2}}{\sqrt{15^2+(d-x)^2}\cdot\sqrt{8^2+x^2}} = 0$$

$$(x-d)\sqrt{8^2+x^2} + x\sqrt{15^2+(d-x)^2} = 0$$

$$(x-d)\sqrt{8^2+x^2} = -x\sqrt{15^2+(d-x)^2}$$

$$(x-d)^2(8^2+x^2) = x^2(15^2+(d-x)^2)$$

$$(x-d)^2(8^2+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}) = 15^2x^2$$

$$8^2(x-d)^2 = 15^2x^2$$

$$161x^2 + 128\cdot\sqrt{3087}\,x - 197568 = 0$$

ABC-formel:

$$x_1 = 19.3255, \quad x_2 = -63.4980$$

Lengd:

$$l(x_1) = \ldots = 60.1332$$

Enklare: Spegle det heile om elvebredda:

$$l_{min} = \sqrt{(15+8)^2 + d^2} = \sqrt{3616} = \underline{60.1332}$$

5 Modellering

Den deriverte står ofte sentralt når vi set opp modellar for korleis ting utviklar seg.

Vi såg ein del eksempel i intro-veka

Temperatur:

$$T'(t) = -k\,(T(t) - T_{ute})$$

↑ Konstant.

Newtons avkjølingslov:

Farten som temperaturen endrar med er proporsjonal med temperatur-forskjellen.

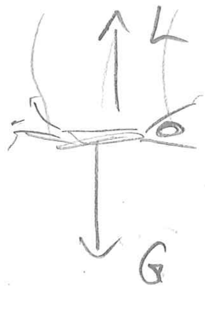
[?] Kva skal til for at temperaturen T forblir uendra her?

→ Sette inn omn, eller ha $T = T_{ute}$

Eksempel: Fritt fall

- Vi tenkjer oss at ein fallskjermhoppar får eit negativt bidrag til akselerasjonen som er proporsjonalt med farten. I tillegg bidrar alltid tyngda positivt til akselerasjonen med 10 - målt i m/s^2.

Om proporsjonalitetskonstanten mellom fart og negativ akselerasjon frå luftmotstand er 0.2 (målt i s^{-1}), kva toppfart har hopparen?



$F = G - L$

$a = g - kv$, $g = 10$, $k = 0.2$

v er fart og a er aks.

Veit: $a(t) = v'(t)$

Altså:

$v'(t) = g - kv(t)$

$v' = 10 - 0.2 \cdot v$

Toppfart: v sluttar å endre seg.

$\boxed{?}$ Kva er då $v'(t)$? $\rightarrow 0$.

$0 = 10 - 0.2 v_{max}$, $v_{max} = \frac{10}{0.2} = \underline{50}$, $50 m/s = 180 km/h$

Eksempel: Kaninar på ei øy

- Sjå eige notat for oppgåveteksten

$y' = ky(1 - \frac{y}{L})$

a) Dersom vi startar med at y er mykje mindre enn L, er $\frac{y}{L} \approx 0$

Altså: $y' = ky$

- Farten y aukar med, blir større og større dess større y blir (eksponentiell vekst).

Etterkvart er ikkje $\frac{y}{L}$ så liten lenger.

b) Dersom y flatar ut, sluttar å endre seg: $y'(t) \approx 0$

Modell:

$0 = ky(1 - \frac{y}{L})$

$1 - \frac{y}{L} = 0$, $\frac{y}{L} = 1$, $\underline{y = L}$

- Altså: $y' \to 0$ og $y \to L$ når t blir stor.

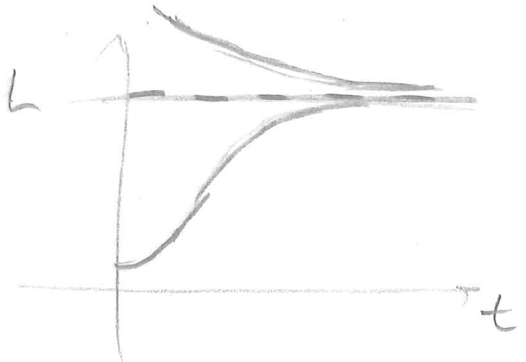
c) Med $y > L$:

$$1 - \frac{y}{L} < 0$$

$\Rightarrow y' = ky(1 - \frac{y}{L}) < 0$, y vil minke

Kor lenge $\boxed{?}$

$\rightarrow$ til $y \approx L$



d) Når y aukar raskast: y' er maksimal.

– Når den deriverte av y' er null (endrar forteikn frå positiv til negativ).

Altså $y'' = 0$

Deriverar y' i modellen:

$$y'' = \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt}\left(ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)\right)$$

Produktregelen:

$$y'' = ky'\left(1 - \frac{y}{L}\right) + ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)' =$$

$$ky'\left(1 - \frac{y}{L}\right) + ky\left(-\frac{y'}{L}\right) =$$

$$k\left(y' - \frac{1}{L}y'y - \frac{1}{L}y'y\right) = ky'\left(1 - \frac{2}{L}y\right)$$

$$y'' = 0$$

$$ky'\left(1 - \frac{2}{L}y\right) = 0$$

$y' = 0$ eller $1 - \frac{2}{L}y = 0$

Når det flatar ut; ikkje interessant

$$1 - \frac{2}{L}y = 0$$

$$\frac{2}{L}y = 1$$

$$\underline{y = \frac{L}{2}} = \frac{1500}{2} = 750$$

Nytte: Når ein skal ta ut fangst, for eksempel.

I praksis: Ikkje opplagt kva L og k må vere – eller om modellen er god nok.

e) $$y' = \left(\frac{L}{1 + Ce^{-kt}}\right)' = -L\left(1 + Ce^{-kt}\right)^{-2} \cdot \left(1 + Ce^{-kt}\right)'$$

$$= -\frac{L}{\left(1 + Ce^{-kt}\right)^2} \cdot Ce^{-kt} \cdot (-k) = \frac{kLCe^{-kt}}{\left(1 + Ce^{-kt}\right)^2}$$

$$ky\left(1-\frac{y}{L}\right)=k\frac{L}{1+C'e^{-kt}}\left(1-\frac{1}{L}\cdot\frac{L}{1+C'e^{-kt}}\right)=$$

$$\frac{kL}{1+C'e^{-kt}}\cdot\frac{1+C'e^{-kt}-1}{1+C'e^{-kt}}=\frac{kLC'e^{-kt}}{(1+C'e^{-kt})^2}=y'$$

$\square$

- Merk: Dette stemmer hele tida, for alle t, uansett hva C' er.

f) $\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{L}{1+C'e^{-kt}}=\frac{L}{1+0}=\underline{L}$

(Men det visste vi jo:)

g) Skal ha: $y(0)=40$

$$\frac{L}{1+C'\cdot e^{-k\cdot 0}}=40$$

$$\frac{L}{1+C'}=40$$

$$L=40(1+C')$$

$$1+C'=\frac{L}{40}$$

$$C'=\frac{L}{40}-1=\frac{1500}{40}-1=\underline{36.5}$$

Modellen: Differensiallikning
Kravet $y(0)=40$: Startkrav
} Startverdiproblem

- To be continued.