Eksempel

Denne modellen gir farten v til ein fallskjermhoppar, målt i meter per sekund, som funksjon av tida t, målt i sekund:

$$v(t) = 50\left(1 - e^{-t/5}\right) \quad .$$

a) Frå tidspunktet $t = 0$, då ho hoppa ut, til $t = 10$, kor langt har ho falt?

b) Gitt at $s(0) = 0$, bestem $s(t)$, der s er lengda ho har falt ved tida t.

c) Bestem akselerasjonen hennar, $a(t)$.

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala:

$$\int \left(x^{7.2} + \cos x - 2\sqrt{x}\right)\, dx$$
$$\int \frac{5}{1+x^2}\, dx$$
$$\int xe^x\, dx$$

Eksempel

Finn desse ubestemte integrala ved variabelbyte:

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

$$\int x^{14}\cos x^{15}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

“Eksempel”

a) Finn dette ubestemte integralet ved variabelbyte:

$$\int \sin(3x - 7)\, dx \quad .$$

b) Vis at dersom $F'(x) = f(x)$, så er

$$\int f(ax + b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad .$$

c) Gjer oppgåve a) om igjen.

d) Finn dette ubestemte integralet:

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 3}\, dx \quad .$$

Eksempel

Finn desse (bestemte) integrala eksakt:

$$\int_{-1}^{2} xe^{2x}\,dx$$

$$\int_{1}^{2} x\sin x^2\,dx$$

Eksempel

(Ikkje reint hypotetisk)

Ein matematikklærar har tenkt å vise studentane sine at trapesmetoden er mykje betre til å estimere integral enn einsidige Riemann-summar. Som eksempel har han vald

$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\pi \quad .$$

a) Når han skal vise at trapesmetoden er betre enn einsidige Riemannsummar, viser det seg at han får same svar heile tida – med både trapesmetoden, venstre- og høgre-Riemannsummar. Kvifor?

b) Teorien seier at

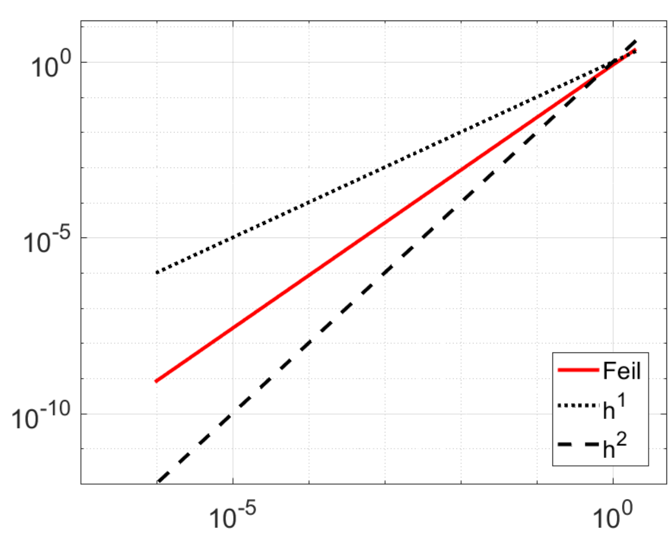
$$\int_a^b f(x)\, dx = T_n + \frac{M_2}{12}(b-a)h^2 \quad \text{der}$$

T_n er trapes-estimatet med n delintervall, $h = (b-a)/n$ og

$$|M_2| \leq \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \quad ,$$

eller sagt på "godt norsk": M_2 kan ikkje vere større enn den største dobbeltderiverte av f på intervallet.

Men når han plottar feilen i estimatet som funksjon av h, går det ikkje som h^2 i det heile. Kvifor ikkje?



1 Spenninga i stikkontakten

Dette er ein rimelig presis modell for spenninga i stikkontakten:

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t) \quad ,$$

Der $U_0 = 325$ V og $\omega = 100\pi$ s^{-1} (Hz).

a) Kva er perioden til $U(t)$?

b) Kva er gjennomsnittet av $U(t)$ over éin periode?

c) Kva er gjennomsnittet av $(U(t))^2$ over éin periode?
Bruk gjerne at $\sin^2 x = (1 - \cos(2x))/2$.

Taperull

Ein taperull har ytre radius $b = 5$ cm og indre radius $a = 3$ cm. Den har tjukna [tykkelsen] $\Delta r = 0.02$ cm.

Kor mange meter tape er det på rullen?

Eksempel

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad D_f = [0, 2] \quad .$$

a) Bestem volumet du får når f blir rotert om x-aksen.

b) Bestem volumet du får når f blir rotert om y-aksen.

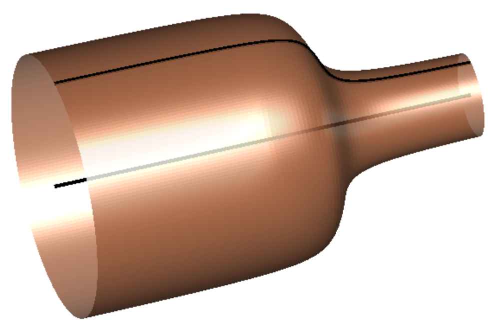
Flaske

Profilen til ei flaske er gitt ved

$$p(x) = 0.7 \arctan(4 - 3x) + 2, \quad D_p = [-5, 5] \quad .$$

Eininga [enheten] er cm både for p og x.

Kor mykje [hvor mye] rommar flaska?



Å løfte ein satelitt

Ein satelitt med massen $m = 500$ kg skal settast i bane i høgda $H = 35786$ km over jordoverflata. Tyngdekrafta i høgda h er i følge Newtons gravitasjonslov

$$G(h) = k\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

der konstanten $k = 6.67 \cdot 10^{-11}$ $\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$, $M = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg er jordmassen og $R = 6.371 \cdot 10^6$ m er jordradien.

a) Kvifor er det vanlegvis ok å gå ut frå at $G = mg$ der $g = 9.81$ $\mathrm{m/s}^2$?

b) Kor stort arbeid må ein gjere for å overvinne tyngdekrafta når satelitten skal i bane?