Eksamen i matematikk 1000 for data, DAFE 1000, mai 2018

Løysingsforslag

Oppg. 1

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot 3+0 & 1\cdot 2+2\cdot 1+0 \\ 0+2\cdot 3-2\cdot 1 & 0+2\cdot 1-2\cdot 1 \\ 3\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 1 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 0 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}}$$

Sidan A og B har ulike format, er ikkje $A+2B$ definert. Og sidan B har 2 søyler og A har 3 rekker, er heller ikkje BA definert.

$$CB = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 3 + 1\cdot 1 & -2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 0 - 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

b) rref-funksjonen rekkereduserar ei matrise til redusert trappeform. Matrisa det er snakk om her, [A, b] i MATLAB-notasjon, er totalmatrisa til likningssystemet.
Av resultatet av rekkereduksjonen ser vi at

$x_1 - 0.0455 x_4 = 1.0455$
$x_2 - 1.3182 x_4 = 0.3182$
$x_3 + 0.0909 x_4 = 0.9091$
x_4 er fri.

Altså:
$x_1 = 1.0455 + 0.0455 x_4$
$x_2 = 0.3182 + 1.3182 x_4$
$x_3 = 0.9091 - 0.0909 x_4$
x_4 er fri.

På vektor-form:

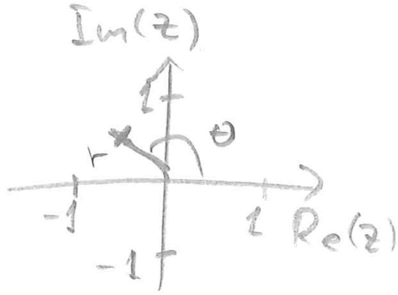
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0455 \\ 0.3182 \\ 0.9091 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0.0455 \\ 1.3182 \\ -0.0909 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oppg. 2

$$(1-i)z = i$$

$$z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{i+i^2}{1-i^2} =$$

$$\frac{i-1}{1+1} = \underline{\frac{1}{2}(-1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$



Polarform: $z = re^{i\theta}$ der

$$r = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{og}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1$$

I tillegg skal θ ligge i 2. kvadrant

$$\theta = \arctan -\frac{1}{2} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\underline{z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}}$$

Oppg. 3

$$T'(t) = -0.1\,(T(t) - f(t))$$

$$f(t) = 15 - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t - 1\right),\ D_f = [0, 24]$$

$$T(0) = 17$$

a) Vi set $t=0$ inn i differentiallikninga og brukar startkravet:

$$T'(0) = -0.1\,(T(0) - f(0)) =$$

$$-0.1\,(17 - (15 - 3\cos(\tfrac{\pi}{12}\cdot 0 - 1))) =$$

$$-0.1\,(2 + 3\cos(-1)) = \underline{-0.2 - 0.3\cos(-1)}$$

$$\approx -0.362$$

Innetemperaturen avtar med ca. 0.36 °C per time ved midnatt.

For kandidat A ser vi at $T(0) \approx 15$. Altså oppfyller ikkje denne start-kravet.

For kurve D ser vi at $T'(0) \approx 0$. Men ved $t=0$, er temperaturdifferansen, $T(t) - f(t)$, ganske stor, og dermed skal $T(t)$ avta ganske raskt.

For D og B ser vi at $T'(0)$ er ganske like. Men vi ser også at for

D begynnar $T(t)$ å auke mens innetemperaturen $T(t)$ framleis er større enn utetemperaturen $f(t)$. Dette stemmer verken med differentiallikninga eller sunn fornuft.

Dermed står vi igjen med kandidat B, som må vere den rette løysinga.

Legg merke til at $f(t)$ og $T(t)$ krysser kvarandre der $T(t)$ har ekstremalpunkt. Dette stemmer med differentiallikninga, som seier at $T'(t) = 0$ når $T(t) = f(t)$.

b) Vi kan løyse startverdiproblemet med Eulers metode, til dømes.

Generelt: For startverdiproblemet

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

har vi at

$$y(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n)h$$ der

$x_n = x_0 + n \cdot h$ og h er ei steglengde vi vel sjølve. Denne

må vere liten for at estimatet skal vere nøyaktig.
Her har vi t og T i staden for x og y.
Ei MATLAB-implementering kan sjå slik ut:

```
f=@(t) 15-3*cos(pi/12-1);
F=@(t,T) -0.1*(T-f(t));

t0=0; T0=17;
h=0.1;

i=1;
t=t0;
T=T0;

while t<24
    tVektor(i)=t;
    TVektor(i)=T;
    T=T+F(t,T)*h;
    t=t+h;
    i=i+1;
end
```

Til slutt vil det vere naturleg å

plotte den numeriske løysinga:

plot(tVektor, TVektor).

Når ein har gjort dette, er det viktig å køyre skriptet om igjen med ein mindre verdi for h og kontrollere at svaret ikkje endrar seg vesentleg.

Oppg. 4

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}, \quad D_f = [1, 10]$$

a) f er maksimal der $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(1+x^2) - \ln x\,(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$\frac{1+x^2 - x\ln x \cdot 2x}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$$

For at $f'(x)$ skal vere null, må telleren i uttrykket over vere null:

$$\underline{1+x^2-2x^2\ln x = 0}.$$

b) Ut frå plottet, ser toppunktet ut til å ligge nær $x=2$. Så vi vel $x_0 = 2$.

Newtons metode går ut på å iterere på dette uttrykket:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)},$$

der $g(x)$ er funksjonen vi skal finne nullpunktet til. Her er

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

$$g' = 0 + 2x - (2 \cdot 2x \ln x + 2x^2 \cdot \tfrac{1}{x}) =$$

$$2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

Altså:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1 + x_n^2 - 2x_n^2 \ln x}{4 x_n \ln x_n}$$

Med $x_0 = 2$:

$$x_1 = 2 + \frac{1 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \ln 2}{4 \cdot 2 \cdot \ln 2} = 1.90168$$

$$x_2 = 1.89506$$

$$x_3 = 1.89503$$

$$x_4 = 1.89503$$

Altså, med 5 desimalar: $\underline{x = 1.89503}$

$$f(1.89503) = \frac{\ln 1.89503}{1 + 1.89503^2} = \underline{0.13923},$$

Som er den maksimale verdien for f.

Oppg. 5

a) Midtpunktsformelen for numerisk derivasjon:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$f'(1.5) \approx \frac{f(1.5+0.5) - f(1.5-0.5)}{2 \cdot 0.5} =$$

$$\frac{f(2) - f(1)}{1} = 1.1547 - 0.7071 = \underline{0.4476}$$

$$f'(1.75) \approx \frac{f(1.75+0.25) - f(1.75-0.25)}{2 \cdot 0.25} =$$

$$\frac{f(2) - f(1.5)}{0.5} = 2 \cdot (1.1547 - 0.9487) = \underline{0.4120}$$

Trapesmetoden:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(x_n)\right)$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 0.5\left(\tfrac{1}{2} \cdot f(0) + f(0.5) + f(1) + f(1.5) + \tfrac{1}{2}f(2)\right) =$$

$$0.5 \cdot (0 + 0.4082 + 0.7071 + 0.9487 + \tfrac{1}{2} \cdot 1.1547) =$$

$$1.320675 \approx \underline{1.3207}$$

Vi kan også bruke Simpsons metode:

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)\right)$$

$$= \frac{0.5}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 0.4082 + 2 \cdot 0.7071 + 4 \cdot 0.9487 + 1.1547)$$

$$= \underline{1.3328}$$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x+1} - x \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot 1}{\sqrt{x+1}^2} =$$

$$\frac{\left(\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right) \cdot 2\sqrt{x+1}}{(x+1) \cdot 2\sqrt{x+1}} =$$

$$\frac{2(x+1) - x}{2(x+1)^{3/2}} = \frac{x+2}{2(x+1)^{3/2}}$$

$$f'(1.5) = \frac{1.5+2}{2 \cdot (1.5+1)^{3/2}} = \underline{0.4427}$$

$$f'(1.75) = \frac{1.75+2}{2 \cdot (1.75+1)^{3/2}} = \underline{0.4112}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

Variabelbytte: $u = x+1 \Leftrightarrow x = u-1$

$\frac{du}{dx} = 1, \quad dx = du$

$u(0) = 1, \quad u(2) = 3$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^3 \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du =$$

$$\int_1^3 \frac{u}{\sqrt{u}}\,du - \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \int_1^3 u^{1/2}\,du - \int_1^3 u^{-1/2}\,du =$$

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{1/2+1}\right]_1^3 - \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-1/2+1}\right]_1^3 =$$

$$\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^3 - 2\left[\sqrt{u}\right]_1^3 = \frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1\right) - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$\frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} - \frac{2}{3} - 2\sqrt{3} + 2 = \frac{4}{3} = 1.3333\ldots$$

Vi ser at dei numeriske estimata i
a) stemmer ganske godt med dei eksakte
svara i b).

Oppg. 6

Av linje 1 ser vi at funksjonen vi skal finne nullpunktet til er
$f(x) = x^2 - \cos x$.

Skriptet gir at $f(x) = 0$ for $x \approx 0.8232$.
Vidare ser vi av linje 8, 10 og 20 at presisjonen $1 \cdot 10^{-3} = 0.001$.
Altså:
$x \in [0.8232 - 0.001,\ 0.8232 + 0.001] =$
$[0.8222,\ 0.8242]$

Funksjonen f er elementær og definert på heile $\mathbb{R}$. Difor er f også kontinuerleg på $[0, 2]$.
Vidare er $f(0) = 0^2 - \cos 0 = -1 < 0$ og
$f(2) = 2^2 - \cos 2 = 4 - \cos 2 > 0$.
Dermed er f garantert å ha eit nullpunkt på $[0,2]$ ved skjæringssetninga.

Det same resonnementet kan vi gjere for intervallet $[0.8222,\ 0.8242]$:

$f(0.8222) = 0.8222^2 - \cos 0.8222 = -4.598 \cdot 10^{-3} < 0$

og

$f(0.8242) = 1.6125 \cdot 10^{-4} > 0$.