Oppgave 1

Disse matrisene er gitte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Regn ut følgende matriser:

$$AB, \quad A + 2B, \quad BA \quad \text{og} \quad CB \quad .$$

Dersom noen av disse ikke er definert, skal du kort forklare hvorfor.

b) For å løse dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & x_3 & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & - & x_4 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

er følgende operasjoner blitt utført i kommandovinduet i MATLAB:

```
>> A=[1 -3 1 4; 2 0 1 0; 3 1 5 -1; 2 -2 5 3];
>> b=[1; 3; 8; 6];
>> rref([A,b])
ans =
    1.0000         0         0   -0.0455    1.0455
         0    1.0000         0   -1.3182    0.3182
         0         0    1.0000    0.0909    0.9091
         0         0         0         0         0
```

Bruk dette til å sette opp den generelle løsningen av likningssystemet.

Oppgave 2

Løs ligninga

$$(1 - i)z = i.$$

Skriv svaret på kartesisk form og på polarform (trigonometrisk form).

Oppgave 3

Dette er en modell for temperaturen i et lite hus med dårlig isolering:

$$T'(t) = -0.1(T(t) - f(t)) \quad .$$

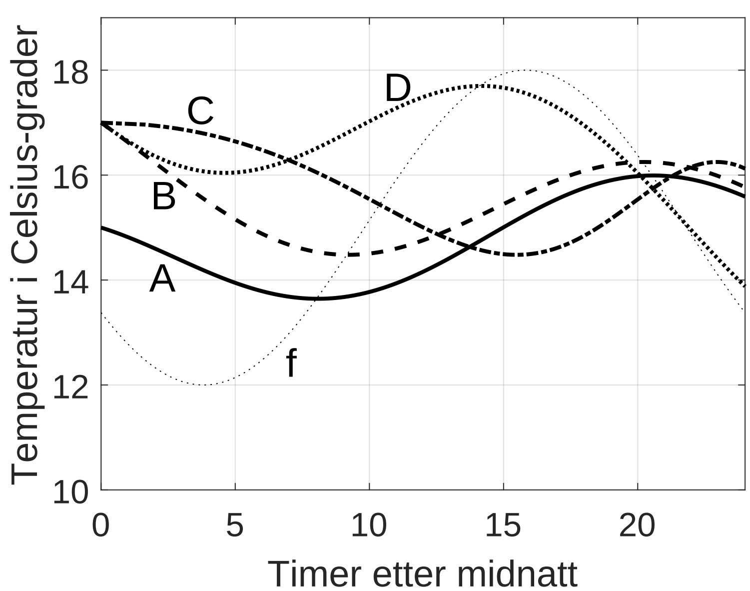
Her er T temperaturen i rommet ved tida t. f er ute-temperaturen. Alle temperaturer er gitt i Celsius-grader, og tida t er gitt i antall timer etter midnatt. Vi bruker denne modellen for ute-temperaturen:

$$f(t) = 15 - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t - 1\right), \quad D_f = [0, 24] \quad .$$

Dette startkravet er gitt: $T(0) = 17$.

a) Etter modellen, hvor fort endrer temperaturen i rommet seg ved midnatt, altså ved $t = 0$?

I figuren nedenfor er fire mulige løsninger av startverdiproblemet (initialverdiproblemet) plotta – sammen med modellen for ute-temperaturen. Bare en av dem er riktig. Hvilken av dem er det? Husk å begrunne svaret.

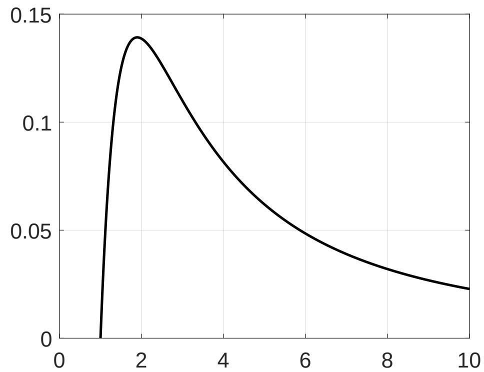


b) Skisser hvordan man kan estimere løsninga av startverdiproblemet over numerisk. Bruk gjerne MATLAB-kode, pseudokode eller liknende til å gjøre dette.

Oppgave 4

Figuren under viser et plott av funksjonen

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}, \quad D_f = [1, 10] \quad .$$



a) Vis hvordan vi kommer fram til at maksimalverdien til f er bestemt av likninga

$$1 + x^2 - 2x^2 \ln x = 0 \quad .$$

b) Estimér løsninga av likninga i a) ved hjelp av Newtons metode. Velg selv en passende verdi for x_0 og utfør et rimelig antall iterasjoner.

Ut fra løsninga di, hva er den maksimale verdien av f?

Oppgave 5

Følgende verdier er gitt for funksjonen f:

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	0.0000	0.4082	0.7071	0.9487	1.1547

a) Bruk tabellen til å estimere $f'(1.5)$ og $f'(1.75)$ og $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Tallene i tabellen er verdiene til den elementære funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}} \quad .$$

b) Bestem $f'(1.5)$, $f'(1.75)$ og $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ eksakt.

Oppgave 6

Dette ukommenterte MATLAB-skriptet er ei implementering av halveringsmetoden (midtpunktmetoden):

```
funk=@(x) x^2-cos(x);

a=0;
b=2;
fa=funk(a);
fb=funk(b);

Pres=1e-3;

while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;
  fc=funk(c);
  if fa*fc<0
    b=c;
  else
    a=c;
  end
end

x=(a+b)/2
```

- Hvilken funksjon forsøker dette skriptet å estimere nullpunktet til?
- Når skriptet kjøres, gir det svaret 0.8232. Ut fra dette, angi et så lite intervall som mulig som helt sikkert inneholder et nullpunkt for funksjonen.
- Hvorfor kan vi være sikre på at dette intervallet faktisk inneholder et – og bare ett – nullpunkt?