Erfaringar med numeriske metodar i matematikk-undervisinga for data-ingeniørstudentar

Haugesund, 5. juni 2018

OSLOMET

«*Kandidaten har gode kunnskaper om numeriske beregninger og deres muligheter og begrensninger*»

UNIVERSITETS- OG HØGSKOLERÅDET
The Norwegian Association of Higher Education Institutions

Nasjonale retningslinjer for ingeniørutdanning

«*Kandidaten har gode kunnskaper om numeriske beregninger og deres muligheter og begrensninger*»

UNIVERSITETS- OG HØGSKOLERÅDET

The Norwegian Association of Higher Education Institutions

Nasjonale retningslinjer for ingeniørutdanning

Innføring i ingeniørfaglig yrkesutøvelse og arbeidsmetoder:

"Aktuelle temaer som kan bidra til læringsutbyttet er:
Prosjektarbeid, rapportskriving, presentasjonsteknikk, teknologihistorie, etikk, helse, miljø og sikkerhet, livsløpsanalyser, prosjektøkonomi, laboratoriearbeid, **beregningsperspektiv ved hjelp av datamaskin, bruk av algoritmer og matematiske beregninger med datamaskiner**."

«*Kandidaten har gode kunnskaper om numeriske beregninger og deres muligheter og begrensninger*»

UNIVERSITETS- OG HØGSKOLERÅDET

The Norwegian Association of Higher Education Institutions

Nasjonale retningslinjer for ingeniørutdanning

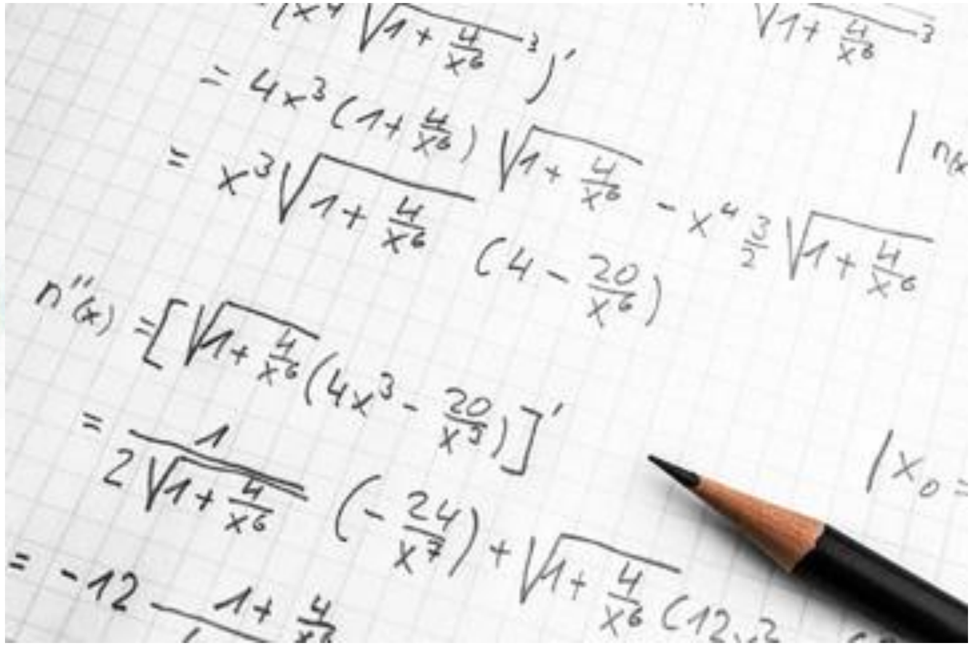
Innføring i ingeniørfaglig yrkesutøvelse og arbeidsmetoder:

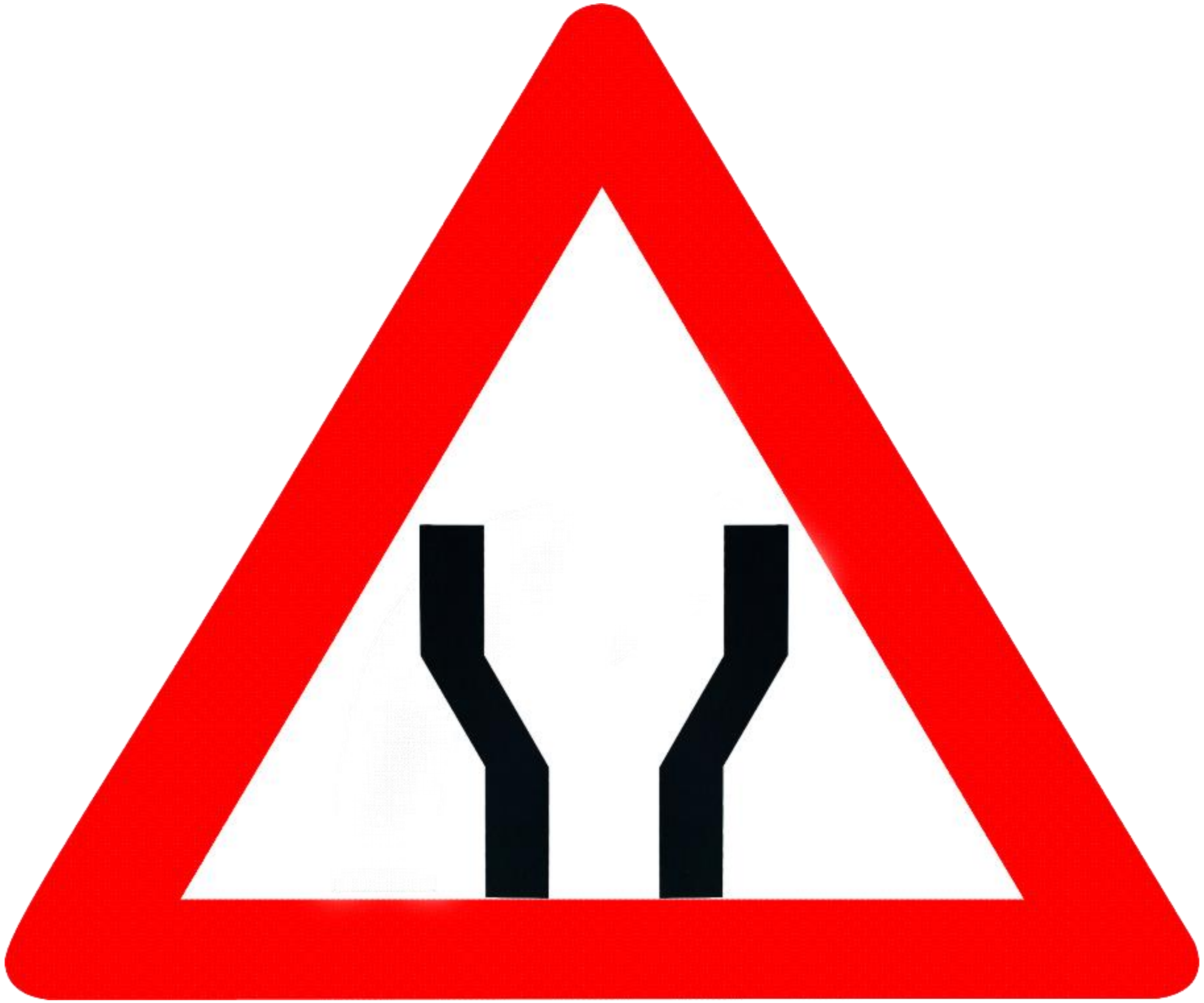
"Aktuelle temaer som kan bidra til læringsutbyttet er:
Prosjektarbeid, rapportskriving, presentasjonsteknikk, teknologihistorie, etikk, helse, miljø og sikkerhet, livsløpsanalyser, prosjektøkonomi, laboratoriearbeid, **beregningsperspektiv ved hjelp av datamaskin, bruk av algoritmer og matematiske beregninger med datamaskiner**."

«*Kandidaten har gode kunnskaper om numeriske beregninger og deres muligheter og begrensninger*»

«*Kandidaten har gode kunnskaper om numeriske beregninger og deres muligheter og begrensninger*»

Ja, takk



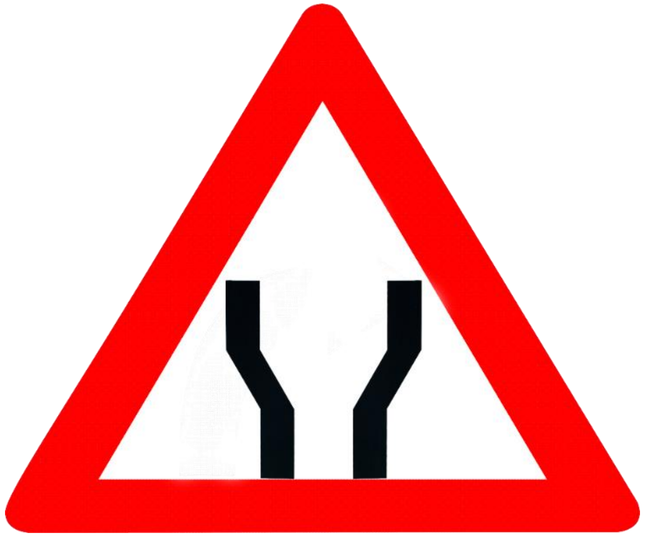


Verda er større enn

$$x^r \qquad \cos x \qquad \sin x \qquad e^x \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

+inversar og endelege kombinasjonar

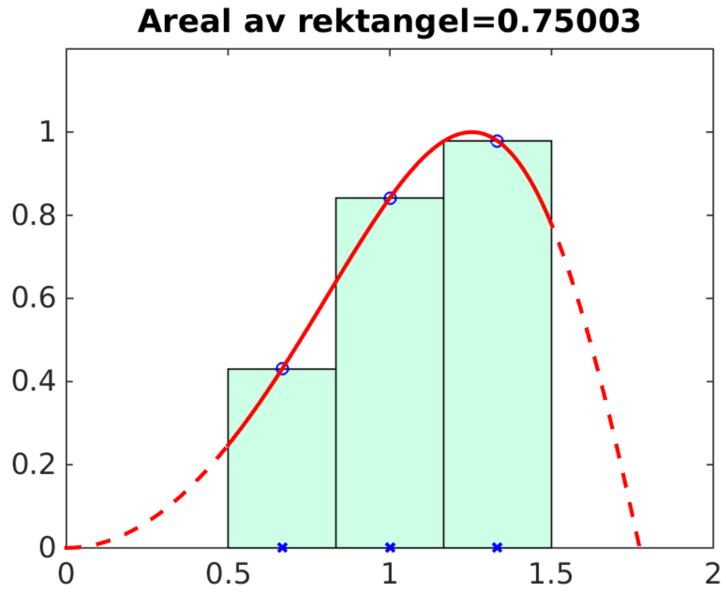
Om vi i tillegg avgrensar verda til **elementære funksjonar** med elementære **antideriverte** og/eller **nullpunkt vi kan finne analytisk**, blir i trangaste laget



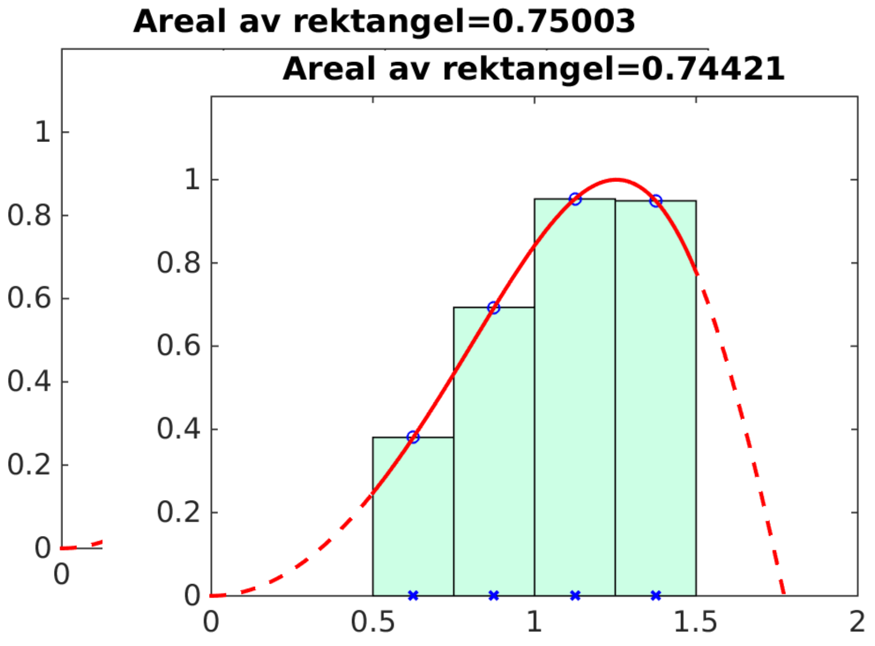
“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”

Geir Dahl, Kristian Ranestad, Arne Hole, Aftenposten 25. oktotber 2017

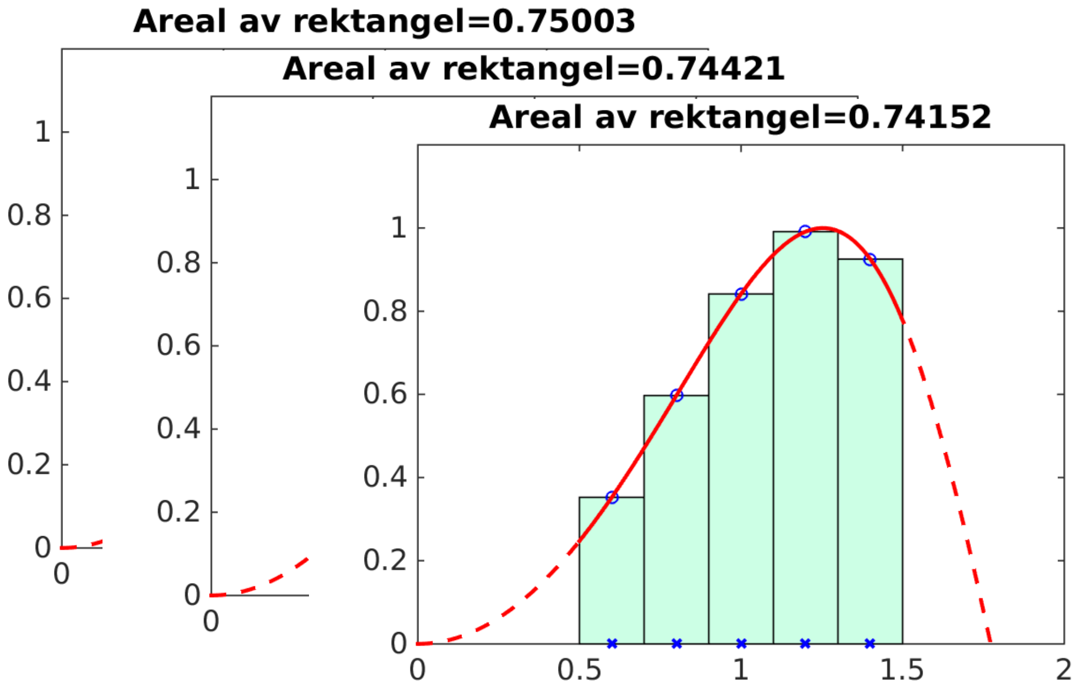
“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”



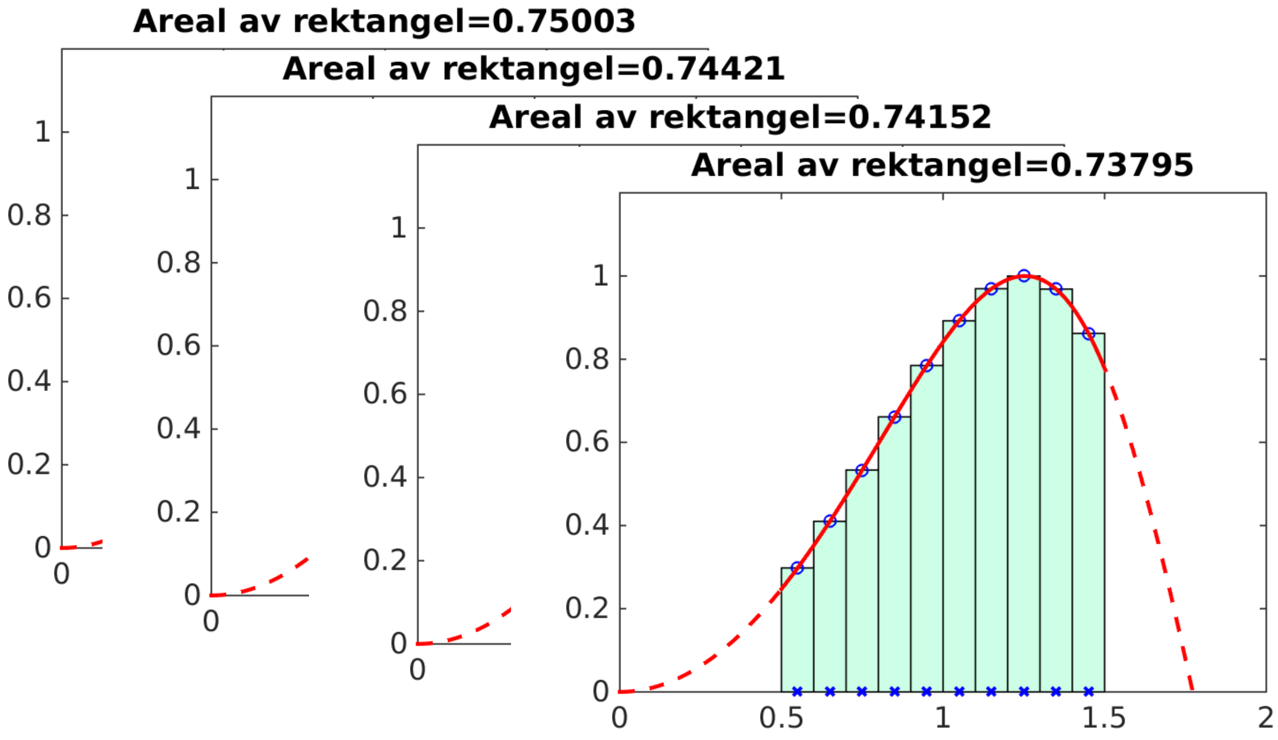
“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”



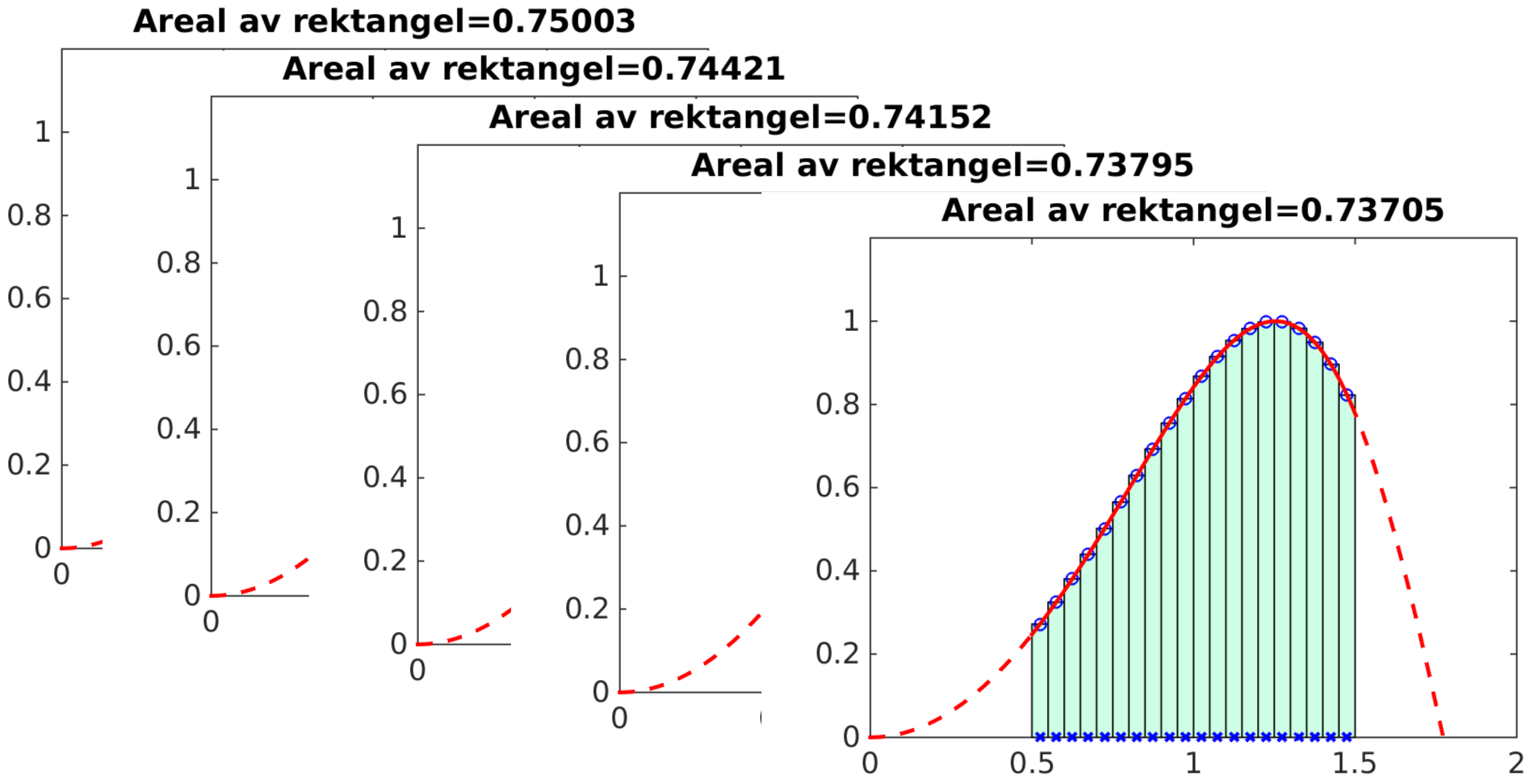
“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”



“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”

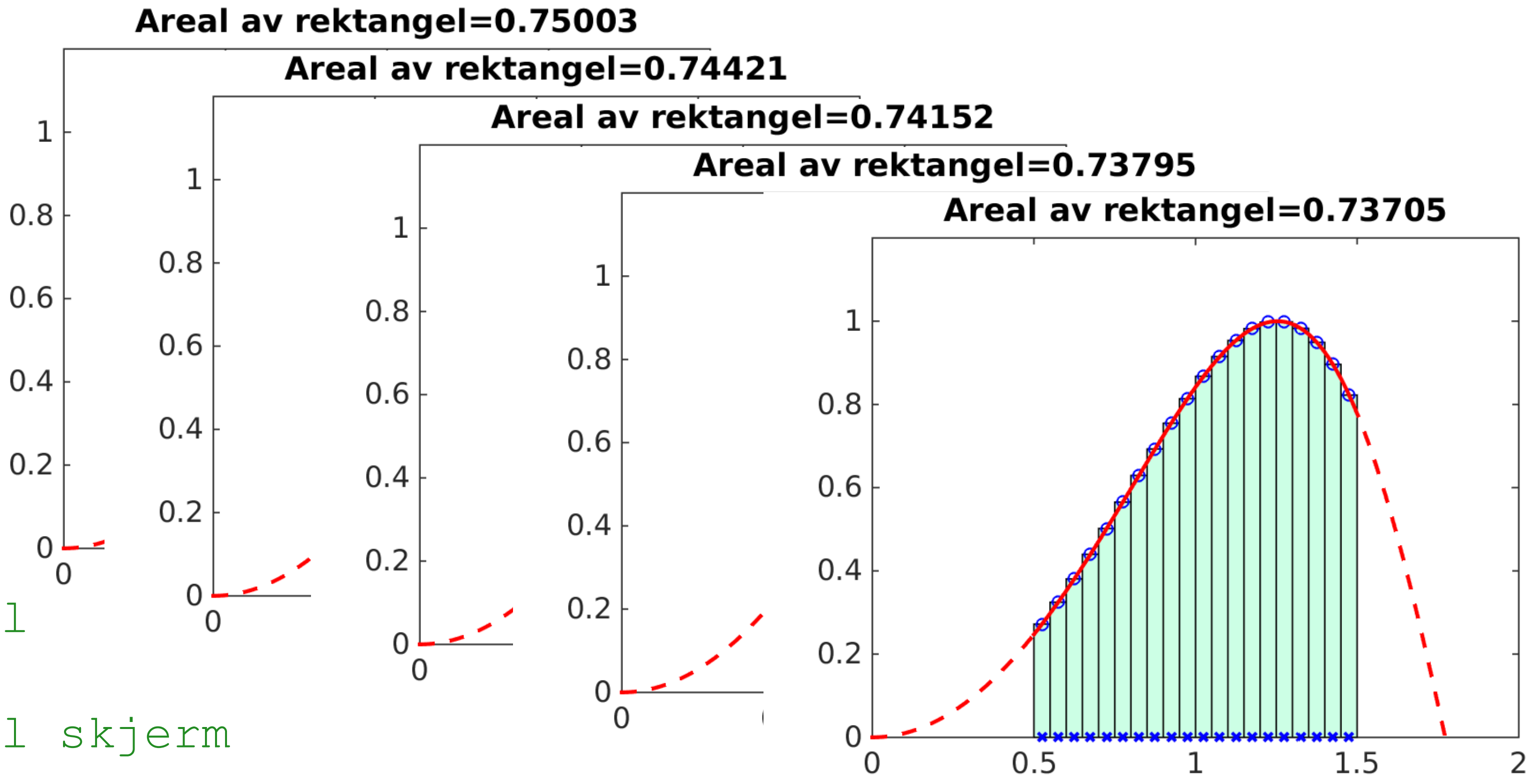


“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”



“Ved å ta inn et helt nytt emne, programmering og koding, vil dybdelæring i matematikk rammes kraftig.”

```
f=@(x) sin(x^2);   % Funksjonen
a=0.5; b=1.5;      % Grenser
N=20;              % # rektangel
dx=(b-a)/N;        % Breidde

Int=0;
for n=1:N
  x=a+(n-0.5)*dx; % Oppdaterar x
  Int=Int+f(x)*dx;% Legg til areal
end
Int                % Skriv svar til skjerm
```



Tidlegare erfaringar med dataingeniør-studentane våre:

- Over halvparten brukar å stryke
- Lite motiverte for matematikk
- Følger i liten grad undervisinga
- Ser matematikk som lite relevant for det dei

ønsker å lære seg,
meir interesserte i skrive
kode enn å løyse likningar

Tidlegare erfaringar med dataingeniør-studentane våre:

- Over halvparten brukar å stryke
- Lite motiverte for matematikk
- Følger i liten grad undervisinga
- Ser matematikk som lite relevant for det dei
ønsker å lære seg,
meir interesserte i skrive
kode enn å løyse likningar

```
S=0;            % Initierer sum
for i=1:20
   S=S+i^2;     % Legg til neste ledd
end
S               % Resultat til skjerm
```

VS.

$$S = \sum_{i=1}^{20} i^2$$

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

VS.

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.1) - f(1-0.1)}{2 \cdot 0.1}$$

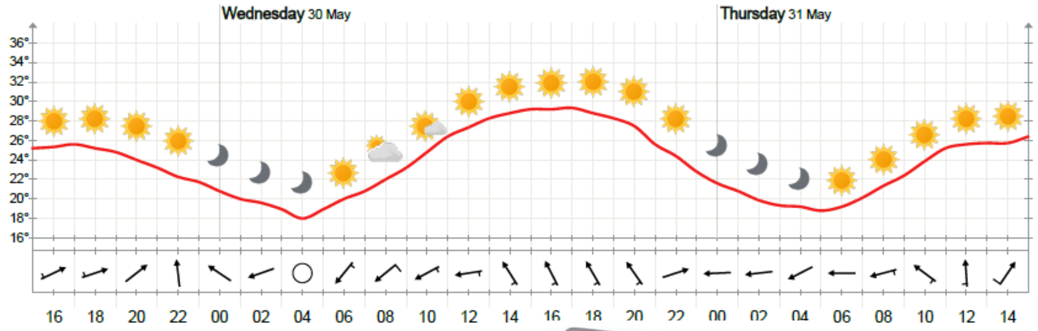
«Hårete» oppgåver

-relevant matematikk
-interessante implementeringar

$$\Gamma(x) = e^x$$

«Hårete» oppgåver

-relevant matematikk
-interessante implementeringar

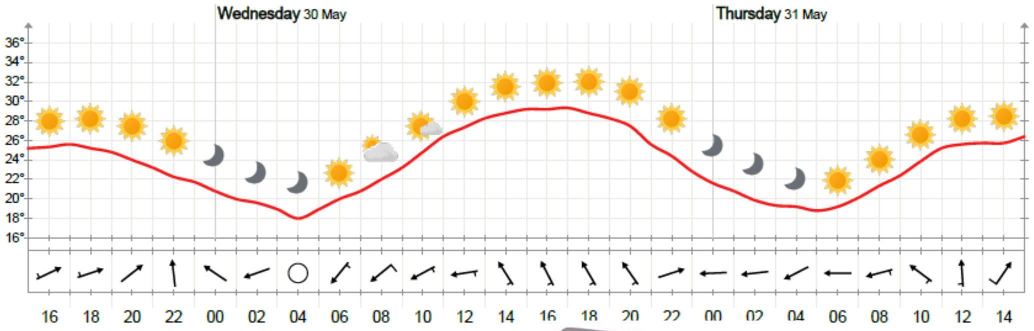


$$\Gamma(x) = e^x$$

$$T'(t) = -k_1\big(T - f(t)\big) + k_2 P(t)$$

«Hårete» oppgåver

-relevant matematikk
-interessante implementeringar



$$\Gamma(x) = e^x$$

$$T'(t) = -k_1\big(T - f(t)\big) + k_2 P(t)$$

Rekkereduksjon, Gauss Jordan-eliminering

Example: The system of equations $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \\ x + 3y - 2z = 17 \end{cases}$ has augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right].$$

Row operations can be used to express the matrix in reduced row-echelon form.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

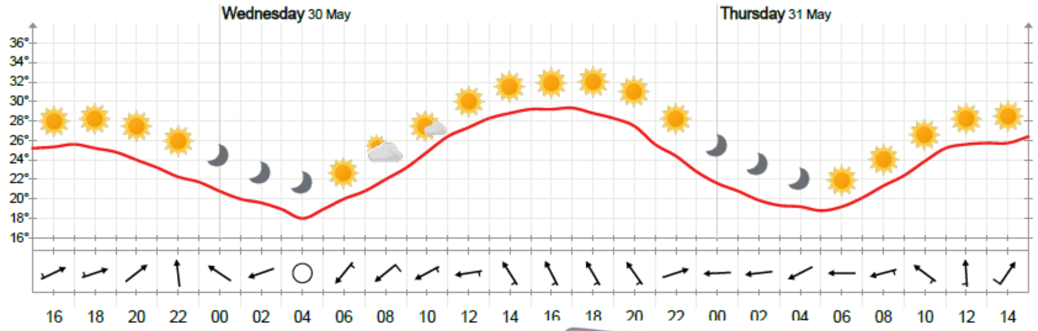
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

The augmented matrix now says that $x = 1$, $y = 4$, and $z = -2$.

«Hårete» oppgåver

-relevant matematikk

-interessante implementeringar



$$\Gamma(x) = e^x$$

$$T'(t) = -k_1\big(T - f(t)\big) + k_2 P(t)$$

Example: The system of equations $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 7z = 0 \\ x + 3y - 2z = 17 \end{cases}$ has augmented matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right].$$

Row operations can be used to express the matrix in reduced row-echelon form.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 17 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 14 \end{array}\right]$$

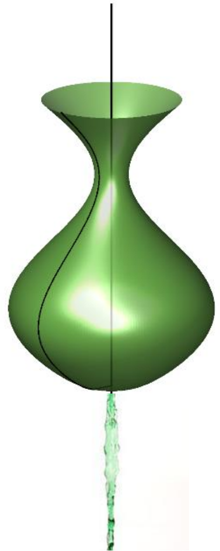
$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

The augmented matrix now says that $x = 1$, $y = 4$, and $z = -2$.

Rekkereduksjon, Gauss Jordan-eliminering



$$V = \pi \int_a^b (p(x))^2\, dx$$

$$h'(t) = -k \frac{\sqrt{h}}{(p(h))^2}$$

Intro-veke

Intro-veke

Føredrag og gruppeoppgåver om

- Bildebehandling (bilde som matriser, filter, konvolusjon)
- Kryptering og talteori (Caesar-chiffer, RSA, primtal)
- Bruk av differensialliknignar, inkl. partielle (varmeleiing, bølgelikning)
- Lyd-manipulering (Fourier-transform, filtrering)

Intro-veke

Føredrag og gruppeoppgåver om

- Bildebehandling (bilde som matriser, filter, konvolusjon)
- Kryptering og talteori (Caesar-chiffer, RSA, primtal)
- Bruk av differensialliknignar, inkl. partielle (varmeleiing, bølgelikning)
- Lyd-manipulering (Fourier-transform, filtrering)

Intro-veke

Føredrag og gruppeoppgåver om

- Bildebehandling (bilde som matriser, filter, konvolusjon)
- Kryptering og talteori (Caesar-chiffer, RSA, primtal)
- Bruk av differensialliknignar, inkl. partielle (varmeleiing, bølgelikning)
- Lyd-manipulering (Fourier-transform, filtrering)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}\right) = \frac{c}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right)$$

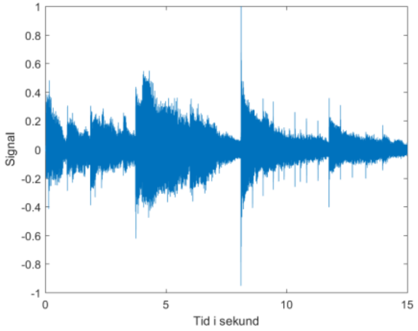
Intro-veke

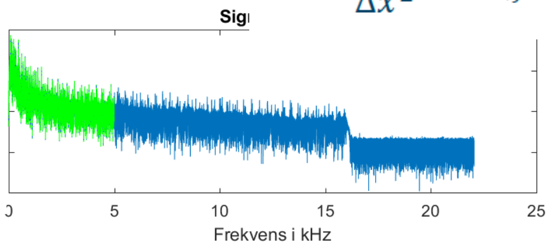
Føredrag og gruppeoppgåver om

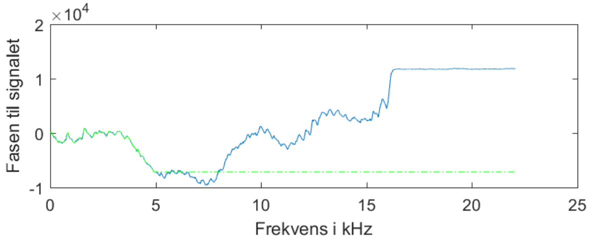
- Bildebehandling (bilde som matriser, filter, konvolusjon)
- Kryptering og talteori (Caesar-chiffer, RSA, primtal)
- Bruk av differensialliknignar, inkl. partielle (varmeleiing, bølgelikning)
- Lyd-manipulering (Fourier-transform, filtrering)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}\right) = \frac{c}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right)$$







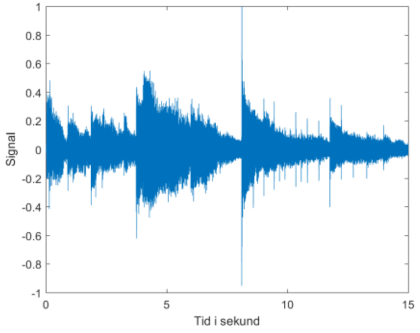
Intro-veke

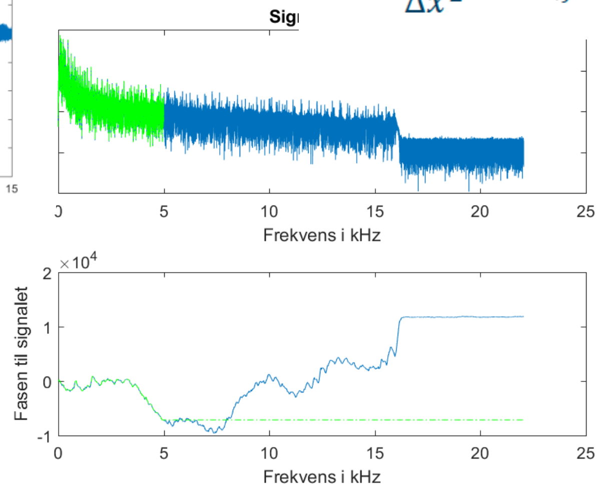
Føredrag og gruppeoppgåver om

- Bildebehandling (bilde som matriser, filter, konvolusjon)
- Kryptering og talteori (Caesar-chiffer, RSA, primtal)
- Bruk av differensialliknignar, inkl. partielle (varmeleiing, bølgelikning)
- Lyd-manipulering (Fourier-transform, filtrering)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{\Delta t^2}\left(u_{i,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i,j}^{n-1}\right) = \frac{c}{\Delta x^2}\left(u_{i-1,j}^{n} - 2u_{i,j}^{n} + u_{i+1,j}^{n}\right)$$

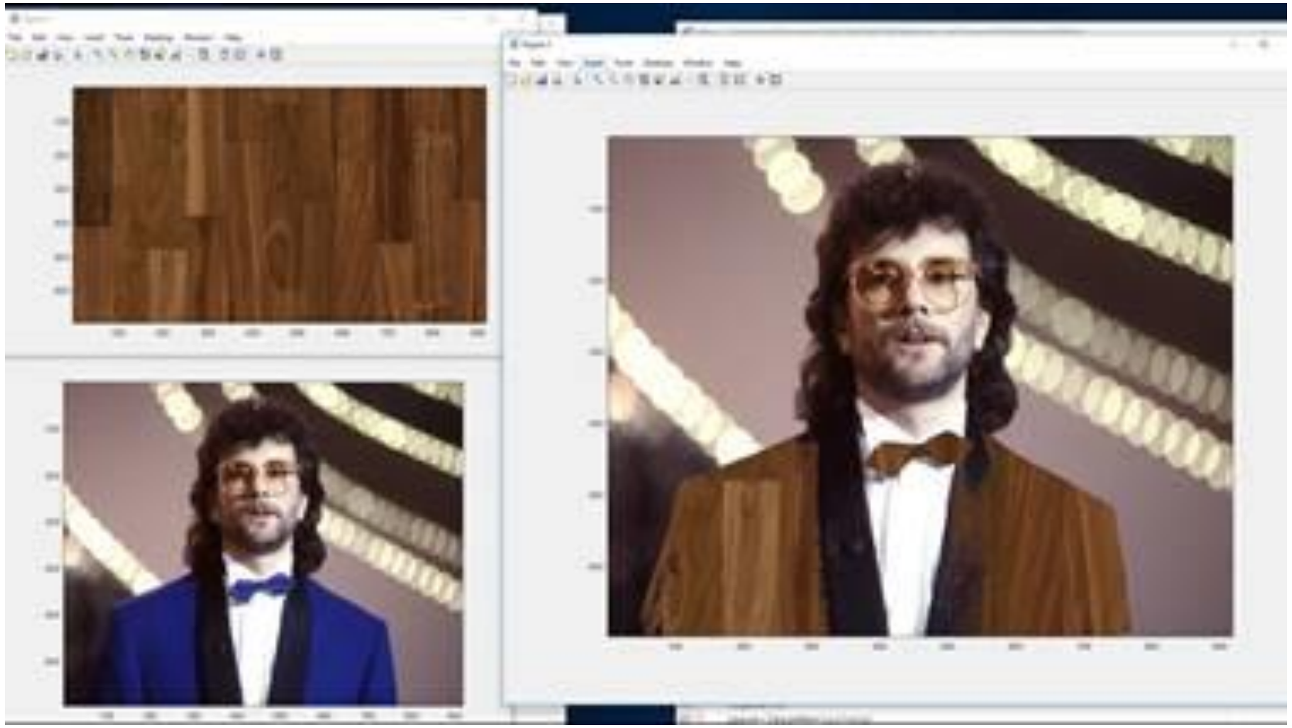




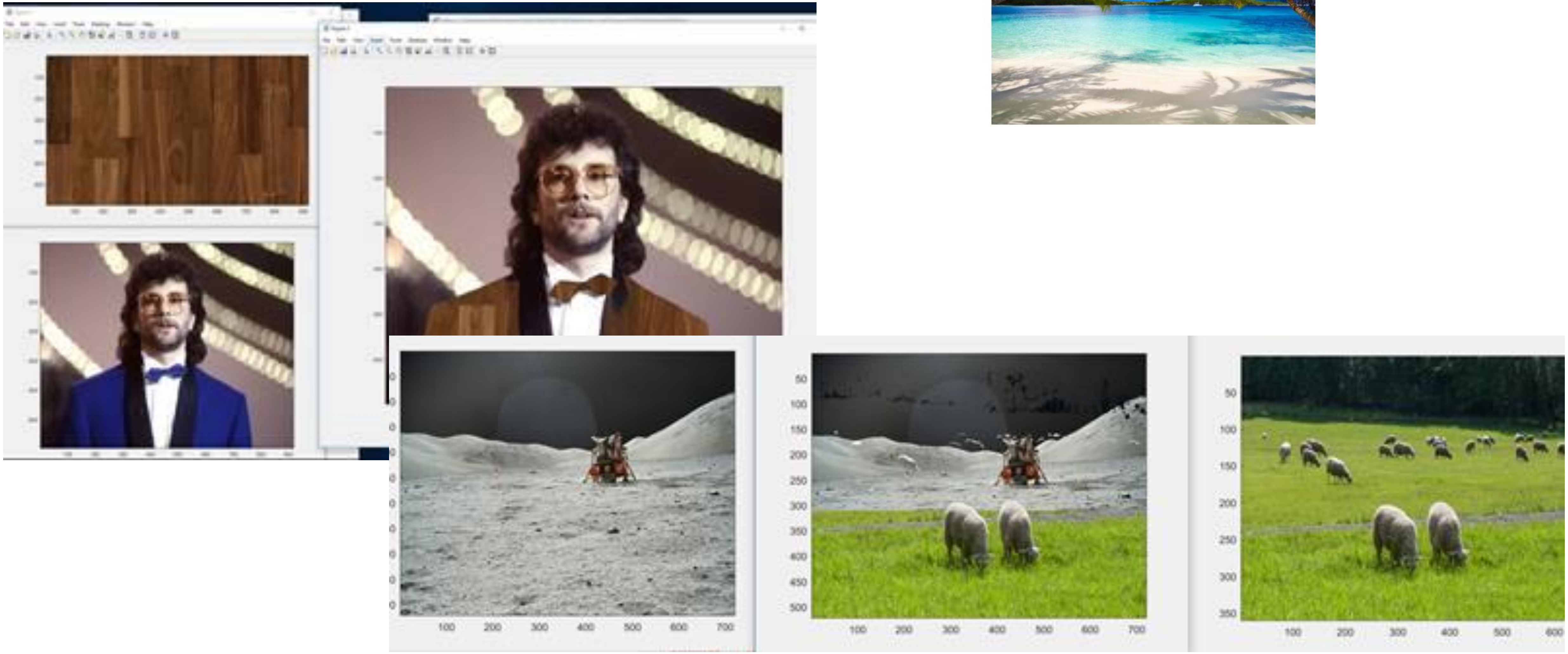
Intro-veke: Bildemanipulering

```
...

% Kopierar det andre blidet
ImageManipulate=V2new;
% Går gjennom visse rekker og søyler
for r=1:320;           % Går gjennom rekkene opp til ei øvre grense
  for s=1:1280;        % Går gjennom søylene
    % Her blir sjølve filteret lagt inn.
    % I dette tilfellet set vi inn pixlar frå bilde 1 dersom
    % den aktuelle bilde2-pixelen er tilstrekkeleg blå eller kvit
    if V2new(r,s,3)> 150 | V2new(r,s,1)> 200 & V2new(r,s,2)>200 & V2new(r,s,3)>200)
      ImageManipulate(r,s,:)=V1(r,s,:);
    end
  end
end

...
```

Intro-veke: Bildemanipulering



Intro-veke: Bildemanipulering



Eksempel på innleveringsoppgåver

Eksempel på innleveringsoppgåver

Disse grenseverdiene er gitte:

a) $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

b) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

c) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

For hver av grenseverdiene, $\lim_{x \to a} f(x)$, lag et plott som illustrerer hva $f(x)$ nærmer seg når x nærmer seg a. For deloppgave a) og b): Gjør dette ved å la x være lik $a \pm h$ og la h bli mindre og mindre. Husk at grenseverdien skal være uavhengig av fra hvilken side x nærmer seg a. La x-aksen være logaritmisk (`semilogx` i MATLAB). Det lønner seg nok å lage et skript som gør dette.

Til slutt: Bestem grenseverdien nøyaktig med papir og blyant.

Eksempel på innleveringsoppgåver

Disse grenseverdiene er gitte:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

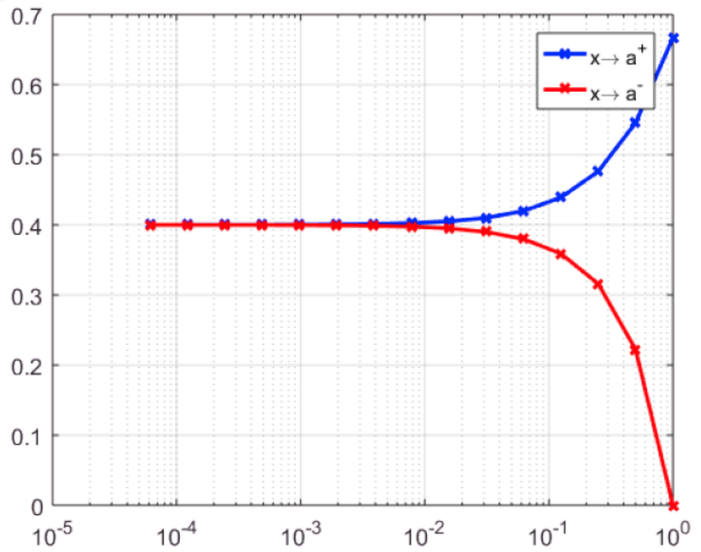
b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

c) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 8x - 10}{x^2 - 25}$.

For hver av grenseverdiene, $\lim_{x \to a} f(x)$, lag et plott som illustrerer hva $f(x)$ nærmer seg når x nærmer seg a. For deloppgave a) og b): Gjør dette ved å la x være lik $a \pm h$ og la h bli mindre og mindre. Husk at grenseverdien skal være uavhengig av fra hvilken side x nærmer seg a. La x-aksen være logaritmisk ('`semilogx`' i MATLAB). Det lønner seg nok å lage et skript som gør dette.

Til slutt: Bestem grenseverdien nøyaktig med papir og blyant.

```
% Funksjonen vi skal ta grensa av
funk=@(x) (2*x.^2-8*x-10)./(x.^2-25);
% Grensa x skal gå mot
a=0;

% Initerar h, der h er forskjellen mellom x og a
h=1;

for n=1:15;
  hVektor(n)=h;
  LimitOver(n)=funk(a+h);   % Estimerar grensa frå oversida
  LimitUnder(n)=funk(a-h);  % Estimerar grensa frå nedsida
  h=h/2;                    % Halverar h
end


% Plottar resultatet
figure(3)
semilogx(hVektor,LimitOver,'bx-','linewidth',2)
hold on
semilogx(hVektor,LimitUnder,'rx-','linewidth',2)
hold off
```



Eksempel på innleveringsoppgåver

Denne funksjonen er gitt:

$$f(x) = x \sin x - 1 \quad .$$

a) Forklar hvorfor f har ett og bare ett nullpunkt på intervallet $[0, \pi/2]$.

b) Om du skal bruke halveringsmetoden for å bestemme dette punktet med en feil som er mindre enn 10^{-5}, hvor mange iterasjoner må du utføre?

c) Gjør dette.

d) Bruk den samme implementeringa til å finne alle løsninger av denne likninga med feil som er mindre enn 10^{-5}:

$$2^x + 2^{-x} = 10 \quad .$$

(Tips: Det kan være lurt å lage et plott først for å se hvor mange løsninger likninga har og for å bestemme passende intervall for halveringsmetoden.)

e) Likninga i d) kan løses eksakt. Finn én av løsningene eksakt og kontrollér at svaret ditt fra d) faktisk *er* mindre enn 10^{-5}.

```
% Funksjonen
funk=@(x) x^2-cos(x);

% Grenser
a=0; b=2;
fa=funk(a);
fb=funk(b);

% Presisjon
Pres=1e-4;

% Itererar
while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;          % Midtpunkt
  fc=funk(c);
  if fa*fc<0
    b=c;
  else
    a=c;
  end
end

% Skriv svaret til skjerm
x=(a+b)/2
```

Eksempel på innleveringsoppgåver

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4 \quad .$$

I tillegg krever vi at $f(0) = 0$.

Vi kan estimere løsninga for $x \in [0,2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi legger midtpunktsformelen for numerisk derivasjon til grunn, kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen[1]:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi sette opp et likningssystem for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

a) Vis hvordan vi kommer fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrrrcl}
0.5f_1 & +f_2 & & & = & 0.8125 \\
-f_1 & +f_2 & +f_3 & & = & 4 \\
 & -f_2 & +1.5f_3 & +f_4 & = & 11.8125 \\
 & f_2 & -4f_3 & +5f_4 & = & 28
\end{array} \quad .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

c) Den fulle løsninga for $f(x)$ er $f(x) = x^3$. Vis at dette stemmer – altså at $f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4$ og at $f(0) = 0$ for denne funksjonen.

d) Plott den fulle løsninga sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse ut til å ligge omtrent der de skal?

Eksempel på innleveringsoppgåver

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4 \quad .$$

I tillegg krever vi at $f(0) = 0$.

Vi kan estimere løsninga for $x \in [0, 2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi legger midtpunktsformelen for numerisk derivasjon til grunn, kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen[1]:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi sette opp et likningssystem for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

a) Vis hvordan vi kommer fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrrrcl} 0.5f_1 & +f_2 & & & = & 0.8125 \\ -f_1 & +f_2 & +f_3 & & = & 4 \\ & -f_2 & +1.5f_3 & +f_4 & = & 11.8125 \\ & f_2 & -4f_3 & +5f_4 & = & 28 \end{array} \quad .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

c) Den fulle løsninga for $f(x)$ er $f(x) = x^3$. Vis at dette stemmer – altså at $f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4$ og at $f(0) = 0$ for denne funksjonen.

d) Plott den fulle løsninga sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse ut til å ligge omtrent der de skal?

$$\frac{-f_{n-1} + f_{n+1}}{2h} + x_n f_n = g(x_n)$$

Eksempel på innleveringsoppgåver

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4 \quad .$$

I tillegg krever vi at $f(0) = 0$.

Vi kan estimere løsninga for $x \in [0, 2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi legger midtpunktsformelen for numerisk derivasjon til grunn, kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen[1]:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi sette opp et likningssystem for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

a) Vis hvordan vi kommer fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrrrcl} 0.5f_1 & +f_2 & & & = & 0.8125 \\ -f_1 & +f_2 & +f_3 & & = & 4 \\ & -f_2 & +1.5f_3 & +f_4 & = & 11.8125 \\ & f_2 & -4f_3 & +5f_4 & = & 28 \end{array} \quad .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

c) Den fulle løsninga for $f(x)$ er $f(x) = x^3$. Vis at dette stemmer – altså at $f'(x) + xf(x) = 3x^2 + x^4$ og at $f(0) = 0$ for denne funksjonen.

d) Plott den fulle løsninga sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse ut til å ligge omtrent der de skal?

$$\frac{-f_{n-1} + f_{n+1}}{2h} + x_n f_n = g(x_n)$$

$$\frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\vec{f} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}\vec{f} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ g(x_4) \end{pmatrix} + \frac{f_0}{2h}\vec{e}_1$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Eksempel på innleveringsoppgåver

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + x f(x) = 3x^2 + x^4 \quad .$$

I tillegg krever vi at $f(0) = 0$.

Vi kan estimere løsninga for $x \in [0,2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi legger midtpunktsformelen for numerisk derivasjon til grunn, kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen[1]:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi sette opp et likningssystem for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

a) Vis hvordan vi kommer fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{llllll} 0.5f_1 & +f_2 & & & = & 0.8125 \\ -f_1 & +f_2 & +f_3 & & = & 4 \\ & -f_2 & +1.5f_3 & +f_4 & = & 11.8125 \\ & f_2 & -4f_3 & +5f_4 & = & 28 \end{array} \quad .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

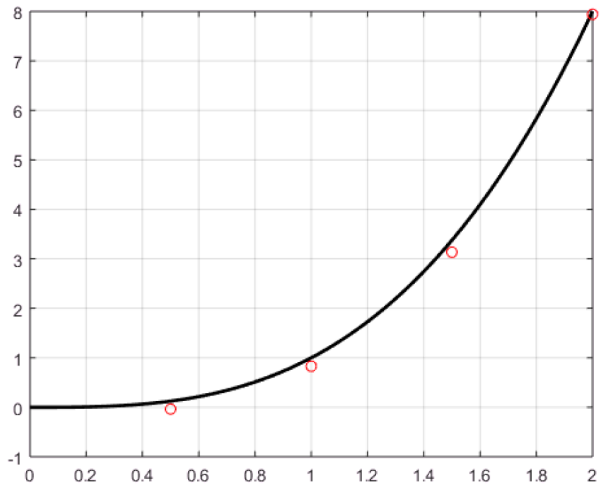
c) Den fulle løsninga for $f(x)$ er $f(x) = x^3$. Vis at dette stemmer – altså at $f'(x) + x f(x) = 3x^2 + x^4$ og at $f(0) = 0$ for denne funksjonen.

d) Plott den fulle løsninga sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse ut til å ligge omtrent der de skal?

$$\frac{-f_{n-1} + f_{n+1}}{2h} + x_n f_n = g(x_n)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{2h}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\vec{f} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}\vec{f} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ g(x_3) \\ g(x_4) \end{pmatrix} + \frac{f_0}{2h}\vec{e}_1$$



Eksempel på innleveringsoppgåver

Bestem disse integralene. Gi svaret eksakt om det går. Hvis det ikke går, skal feilen være mindre enn 10^{-4}.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} x \sin x^2 \, dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sin x^2 \, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 e^{2x} \, dx$

d) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 e^{x^2} \, dx$

Eksempel på innleveringsoppgåver

En ikke-elementær funksjon som heter “feilfunksjonen”, $\mathrm{erf}(x)$, er definert slik:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad .$$

Funksjonen *er* implementert i MATLAB, men det får du ikke lov til å bruke denne til å komme fram til svarene på spørsmåla nedenfor. Men du kan godt bruke den til å *kontrollere* svarene dine. Alle svar som du finner numerisk, skal ha en feil som er mindre enn 10^{-6}.

a) Hvor stor er $\mathrm{erf}(1)$?

b) Hva er $(\mathrm{erf}(x))'$?

c) Bruk blant annet Newtons metode til å løse likninga

$$\mathrm{erf}(x) = 0.8 \quad .$$

Eksempel på innleveringsoppgåver

En ikke-elementær funksjon som heter "feilfunksjonen", $\mathrm{erf}(x)$, er definert slik:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad .$$

Funksjonen *er* implementert i MATLAB, men det får du ikke lov til å bruke denne til å komme fram til svarene på spørsmåla nedenfor. Men du kan godt bruke den til å *kontrollere* svarene dine. Alle svar som du finner numerisk, skal ha en feil som er mindre enn 10^{-6}.

a) Hvor stor er $\mathrm{erf}(1)$?

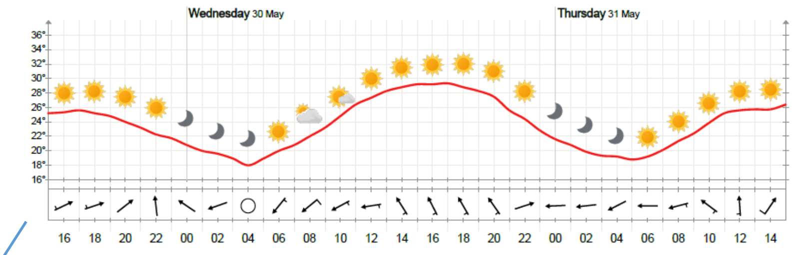
b) Hva er $(\mathrm{erf}(x))'$?

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\mathrm{erf}(x_n) - 0.8}{(2/\sqrt{\pi})\, e^{-x_n^2}}$$

c) Bruk blant annet Newtons metode til å løse likninga

$$\mathrm{erf}(x) = 0.8 \quad .$$

Eksempel frå undervisinga



I ei lita hytte med dårleg isolering står det ein omn [ovn]. Temperaturen i hytta er skildra [beskrevet] med denne modellen:

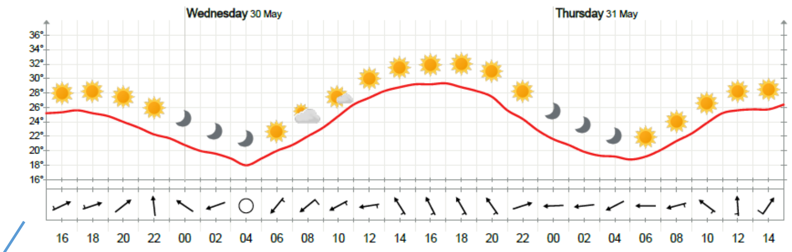
$$T'(t) = -k_1(T(t) - T_{\text{ute}}) + k_2 P \, .$$

der T er temperaturen i hytta og T_{ute} er ute-temperaturen. Begge deler er gitt i Celsius-grader. Tida t er gitt i talet på timar etter midnatt. Konstanten $k_1 = 0.3$ og $k_2 = 0.008$, og P er effekten på omnen – målt i Watt, W. Omnen er regulerbar og kan maksimalt gi 600 W.

Med $T_{ute}(t)$ «komplisert»:

- Bestem *T(t)* numerisk med omnen av (*P*=0).
- Korleis må vi regulere omnen, *P(t)*, for å halde *T* på 17°C?
- Kor mykje energi har vi då brukt i løpet av desse 36 timane?
- For å ha *T*(36)=18, når må seinast vi skru på omen?

Eksempel frå undervisinga

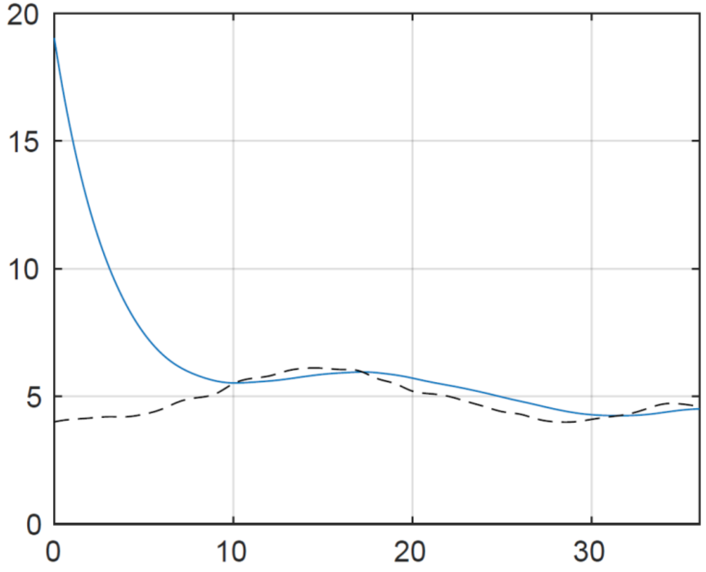


I ei lita hytte med dårleg isolering står det ein omn [ovn]. Temperaturen i hytta er skildra [beskrevet] med denne modellen:

$$T'(t) = -k_1(T(t) - T_{\text{ute}}) + k_2 P .$$

der T er temperaturen i hytta og T_{ute} er ute-temperaturen. Begge deler er gitt i Celsius-grader. Tida t er gitt i talet på timar etter midnatt. Konstanten $k_1 = 0.3$ og $k_2 = 0.008$, og P er effekten på omnen – målt i Watt, W. Omnen er regulerbar og kan maksimalt gi 600 W.

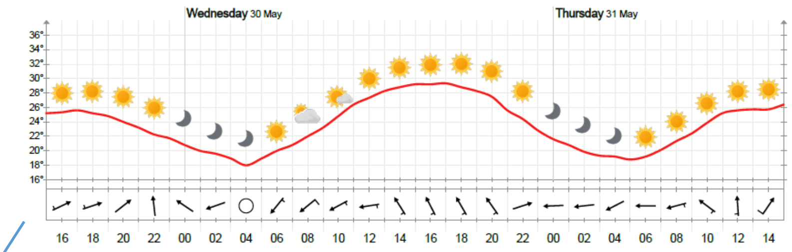
Eulers metode



Med $T_{\text{ute}}(t)$ «komplisert»:

- Bestem $T(t)$ numerisk med omnen av (P=0).
- Korleis må vi regulere omnen, $P(t)$, for å halde T på 17°C?
- Kor mykje energi har vi då brukt i løpet av desse 36 timane?
- For å ha $T(36)$=18, når må seinast vi skru på omen?

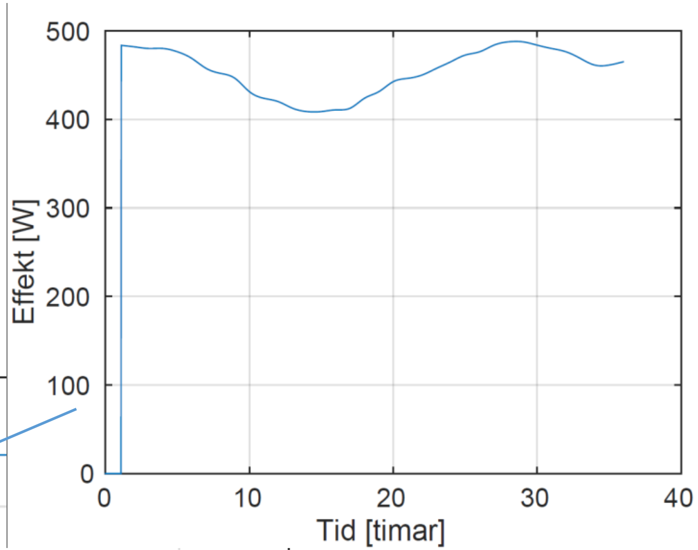
Eksempel frå undervisinga



I ei lita hytte med dårleg isolering står det ein omn [ovn]. Temperaturen i hytta er skildra [beskrevet] med denne modellen:

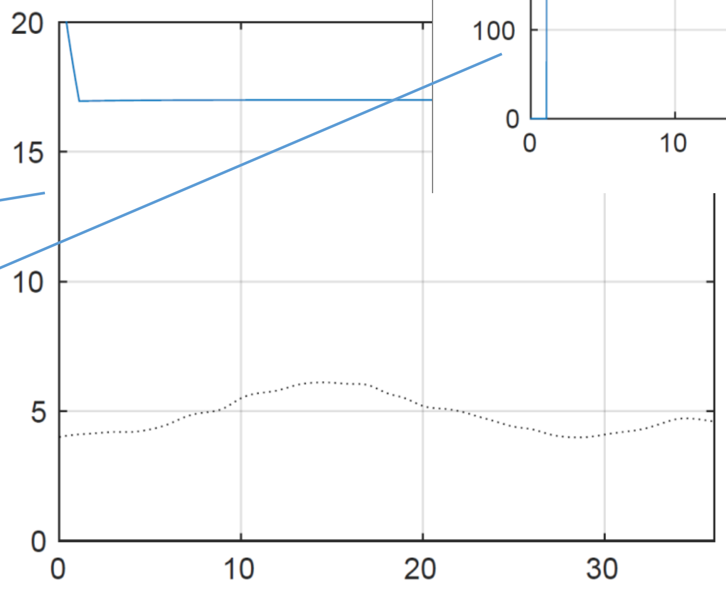
$$T'(t) = -k_1(T(t) - T_{\mathrm{ute}}) + k_2 P \; .$$

der T er temperaturen i hytta og T_{ute} er ute-temperaturen. Begge deler er gitt i Celsius-grader. Tida t er gitt i talet på timar etter midnatt. Konstanten $k_1 = 0.3$ og $k_2 = 0.008$, og P er effekten på omnen – målt i Watt, W. Omnen er regulerbar og kan maksimalt gi 600 W.

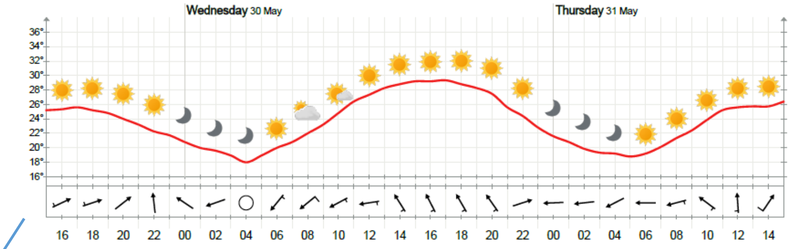


Med $T_{\mathrm{ute}}(t)$ «komplisert»:

- Bestem *T(t)* numerisk med omnen av (*P*=0).
- Korleis må vi regulere omnen, *P(t)*, for å halde *T* på 17°C?
- Kor mykje energi har vi då brukt i løpet av desse 36 timane?
- For å ha *T*(36)=18, når må seinast vi skru på omen?



Eksempel frå undervisinga



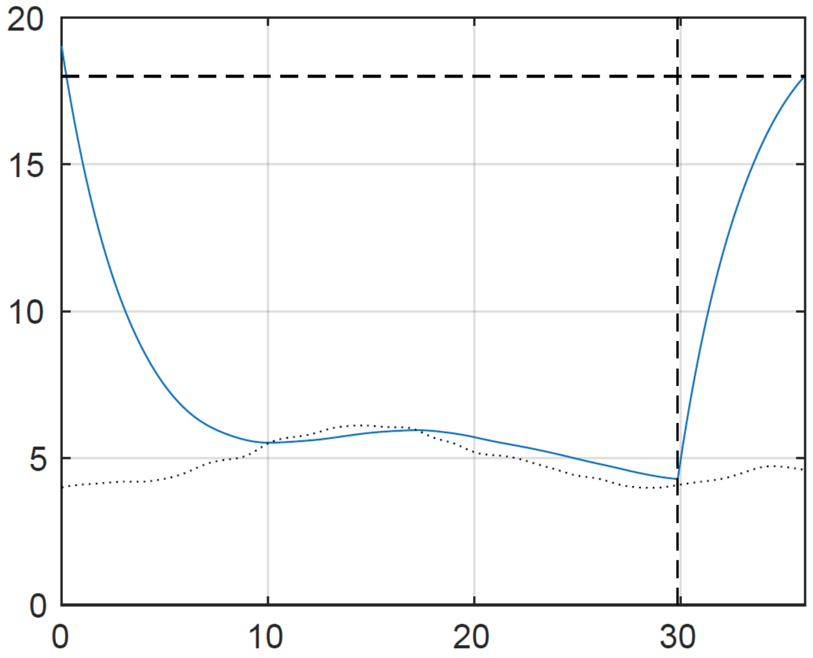
I ei lita hytte med dårleg isolering står det ein omn [ovn]. Temperaturen i hytta er skildra [beskrevet] med denne modellen:

$$T'(t) = -k_1(T(t) - T_{\text{ute}}) + k_2 P \; .$$

der T er temperaturen i hytta og T_{ute} er ute-temperaturen. Begge deler er gitt i Celsius-grader. Tida t er gitt i talet på timar etter midnatt. Konstanten $k_1 = 0.3$ og $k_2 = 0.008$, og P er effekten på omnen – målt i Watt, W. Omnen er regulerbar og kan maksimalt gi 600 W.

Med $T_{ute}(t)$ «komplisert»:

- Bestem $T(t)$ numerisk med omnen av (P=0).
- Korleis må vi regulere omnen, $P(t)$, for å halde T på 17°C?
- Kor mykje energi har vi då brukt i løpet av desse 36 timane?
- For å ha T(36)=18, når må seinast vi skru på omen?



Eksempel på eksamensoppgåver

(i tillegg til tradisjonelle analyseoppgåver)

Eksempel på eksamensoppgåver

Kva for eit problem løyser denne implementeringa?

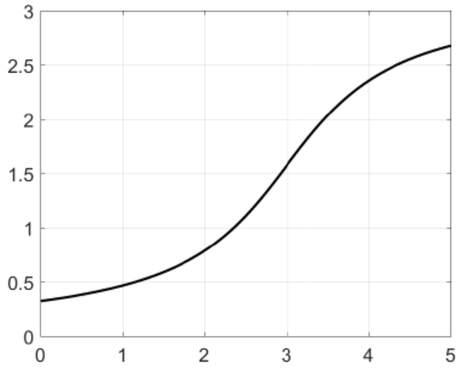
a) Dette skriptet, som kan kjøres i MATLAB, er gitt:

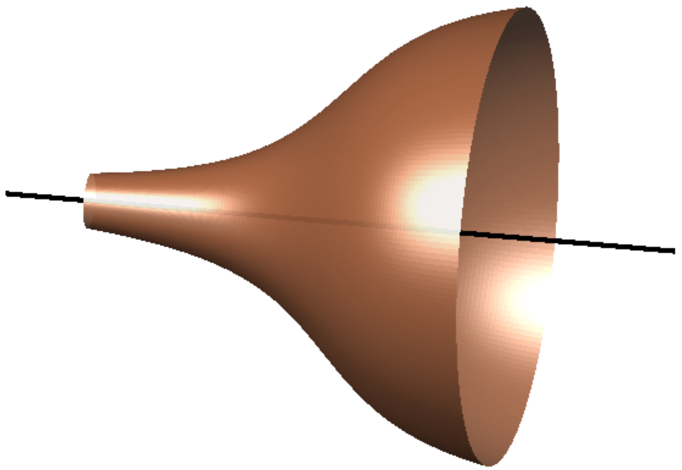
```
1  % Funksjon
2  Funk=@(x,y) x*exp(-y);
3  % Start
4  x=0; y=0;
5  % Slutt
6  xEnd=5;
7
8  h=0.2;      % Steglengde
9
10 % Initerer vektorer
11 n=1;
12 xVektor(n)=x;
13 yVektor(n)=y;
14
15 while x<xEnd
16   n=n+1;
17   y=y+Funk(x,y)*h;
18   x=x+h;
19   xVektor(n)=x;
20   yVektor(n)=y;
21 end
22
23 % Plotter resultatet
24 plot(xVektor,yVektor)
```

- Hvilket matematisk problem forsøker det å estimere løsninga av?
- Hvordan kan du, uten å endre **h** i linje 8, moderere skriptet slik at du får et langt bedre estimat?

Eksempel på eksamensoppgåver

Skissér korleis du ville ha løyst dette problemet – gjerne med litt (pseudo)kode





Volumet i figuren til høgre kommer fram ved at grafen til funksjonen

$$f(x) = \pi/2 + \arctan(x - 3), \quad D_f = [0, 5]$$

roteres rundt x-aksen. Det er denne funksjonen som er plotta til venstre.

Forklar kort hvordan volumet kan beregnes. Bruk gjerne MATLAB-kode eller pseudokode når du forklarer dette.

Eksempel på eksamensoppgåver

Numeriske estimat av deriverte og integral

Følgande verdiar er gitt for funksjonen f:

x	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)$	0.0000	0.4082	0.7071	0.9487	1.1547

a) Bruk tabellen til å estimere $f'(1.5)$ og $f'(1.75)$ og $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Eksempel på eksamensoppgåver

«Koda» analyseoppgåver

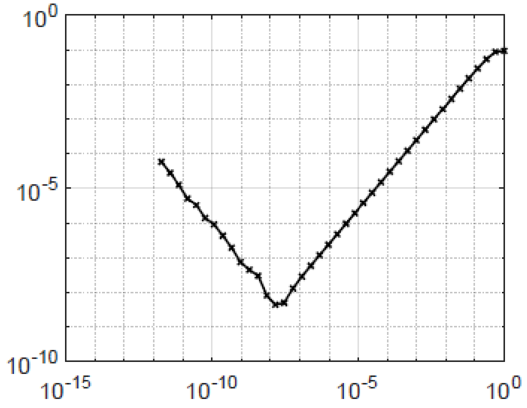
Dette ukommenterte skriptet er gitt:

```
1  f=@(x) x^2-sin(x);
2  a=0;
3  b=2;
4
5  N=input('Gi N-verdien (positivt heiltal) ');
6
7  dx=(b-a)/N;
8  R=0;
9  x=a;
10
11 for i=1:N
12   R=R+f(x)*dx;
13   x=x+dx;
14 end
15
16 R
```

Når skriptet blir køyrd med stadig høgare heiltalsverdiar for N i linje 5, kva verdi vil R i linje 16 nærme seg?

Når skriptet under blir kjørt i MATLAB, får vi opp plottet under. I skriptet er verdien av L i linje 5 skjult. Hva er denne verdien?

```
1  funk=@(x) (cos(x)-1/2)/(x-pi/3);          % Funksjon
2  a=pi/3;                                   % Argumentverdi
3
4  h=1;                                      % Initierer h
5  L= XXXXX
6
7  for n=1:40;
8    hVektor(n)=h;
9    LimPluss(n)=funk(a+h);                  % Estimat over
10   h=h/2;                                  % Halverer h
11 end
12
13 % Plotter
14 loglog(hVektor,abs(LimPluss-L),'kx-')
```



Eksempel på eksamensoppgåver

Finn (minst) éin feil

Dette MATLAB-skriptet er ei implementering av halveringsmetoden/midtpunktmetoden:

```
funk=@(x) (x+1)/(x^2-2);    % Funksjonen

% Grenser
a=0;
b=2;
fa=funk(a);
fb=funk(b);

Pres=1e-3;                % Presisjon

while abs(b-a)>2*Pres
  c=(a+b)/2;              % Midtpunkt
  fc=funk(c);
  if fa*fc<0
    b=c;
  else
    a=c;
  end
end

% Skriver svaret til skjerm
x=(a+b)/2
```

Når skriptet kjøres, gir det svaret 1.4150. Svaret er feil; tallet er slett ikke noe nullpunkt for den aktuelle funksjonen – heller ikke innenfor presisjonen som er forsøkt implementert.

Hva er galt med framgangsmåten her, hvorfor gir ikke implementeringa noe rett svar?

Så korleis gjekk det?

Evaluering:

Jobbar i snitt 8.4 timar per veke med faget,
standardavvik: 4.6 timar

5 er helt enig, 3 er nøytral, 1 er helt uenig

	5	4	3	2	1
a) Jeg tror jeg vil få nytte av det jeg har lært i dette kurset	9	**15**	6	0	0
b) Den numeriske tilnærminga har hjulpet meg til å forstå teorien bedre	5	**12**	**12**	2	0
c) Den numeriske tilnærminga gjør at jeg føler meg godt rustet til å løse kvantitative/matematiske utfordringer i framtida	6	9	**12**	3	0
d) Kodinga i undervisninga har vært en kompliserende faktor	5	7	7	4	7
e) Vi har lært for lite om algebraiske og analytiske teknikker	0	4	**16**	8	2
f) Jeg hadde helst sett at vi bare løste oppgaver med papir, blyant og kalkulator	7	4	7	3	8
g) Numerikk/kode og teori utfyller hverandre	6	**14**	5	4	0
h) Vi kunne godt ha brukt mer tid på implementere flere og mer avanserte numeriske metoder	1	6	**10**	5	5
i) Jeg har stort sett bare brukt ferdige løsningsforslag for skriptene og ikke egentlig forstått noe særlig av de numeriske metodene	0	2	8	**10**	**9**

Evaluering:

Jobbar i snitt 8.4 timar per veke med faget,
standardavvik: 4.6 timar

5 er helt enig, 3 er nøytral, 1 er helt uenig
5 4 3 2 1

a) Jeg tror jeg vil få nytte av det jeg har lært i dette kurset 9 **15** 6 0 0

b) Den numeriske tilnærminga har hjulpet meg til å forstå teorien bedre 5 **12** **12** 2 0

c) Den numeriske tilnærminga gjør at jeg føler meg godt rustet til å løse kvantitative/matematiske utfordringer i framtida
6 9 **12** 3 0

d) Kodinga i undervisninga har vært en kompliserende faktor 5 7 7 4 7

e) Vi har lært for lite om algebraiske og analytiske teknikker 0 4 **16** 8 2

f) Jeg hadde helst sett at vi bare løste oppgaver med papir, blyant og kalkulator 7 4 7 3 8

g) Numerikk/kode og teori utfyller hverandre 6 **14** 5 4 0

h) Vi kunne godt ha brukt mer tid på implementere flere og mer avanserte numeriske metoder
1 6 **10** 5 5

i) Jeg har stort sett bare brukt ferdige løsningsforslag for skriptene og ikke egentlig forstått noe særlig av de numeriske metodene
0 2 8 **10** **9**

Evaluering:

Jobbar i snitt 8.4 timar per veke med faget,
standardavvik: 4.6 timar

5 er helt enig, 3 er nøytral, 1 er helt uenig

	5	4	3	2	1
a) Jeg tror jeg vil få nytte av det jeg har lært i dette kurset	9	**15**	6	0	0
b) Den numeriske tilnærminga har hjulpet meg til å forstå teorien bedre	5	**12**	**12**	2	0
c) Den numeriske tilnærminga gjør at jeg føler meg godt rustet til å løse kvantitative/matematiske utfordringer i framtida	6	9	**12**	3	0
d) Kodinga i undervisninga har vært en kompliserende faktor	5	7	7	4	7
e) Vi har lært for lite om algebraiske og analytiske teknikker	0	4	**16**	8	2
f) Jeg hadde helst sett at vi bare løste oppgaver med papir, blyant og kalkulator	7	4	7	3	8
g) Numerikk/kode og teori utfyller hverandre	6	**14**	5	4	0
h) Vi kunne godt ha brukt mer tid på implementere flere og mer avanserte numeriske metoder	1	6	**10**	5	5
i) Jeg har stort sett bare brukt ferdige løsningsforslag for skriptene og ikke egentlig forstått noe særlig av de numeriske metodene	0	2	8	**10**	**9**

Evaluering:

Jobbar i snitt 8.4 timar per veke med faget,
standardavvik: 4.6 timar

5 er helt enig, 3 er nøytral, 1 er helt uenig
5 4 3 2 1

a) Jeg tror jeg vil få nytte av det jeg har lært i dette kurset 9 **15** 6 0 0

b) Den numeriske tilnærminga har hjulpet meg til å forstå teorien bedre 5 **12** **12** 2 0

c) Den numeriske tilnærminga gjør at jeg føler meg godt rustet til å løse kvantitative/matematiske utfordringer i framtida
6 9 **12** 3 0

d) Kodinga i undervisninga har vært en kompliserende faktor 5 7 7 4 7

e) Vi har lært for lite om algebraiske og analytiske teknikker 0 4 **16** 8 2

f) Jeg hadde helst sett at vi bare løste oppgaver med papir, blyant og kalkulator 7 4 7 3 8

g) Numerikk/kode og teori utfyller hverandre 6 **14** 5 4 0

h) Vi kunne godt ha brukt mer tid på implementere flere og mer avanserte numeriske metoder
1 6 **10** 5 5

i) Jeg har stort sett bare brukt ferdige løsningsforslag for skriptene og ikke egentlig forstått noe særlig av de numeriske metodene
0 2 8 **10** **9**

Evaluering:

Jobbar i snitt 8.4 timar per veke med faget,
standardavvik: 4.6 timar

5 er helt enig, 3 er nøytral, 1 er helt uenig

	5	4	3	2	1
a) Jeg tror jeg vil få nytte av det jeg har lært i dette kurset	9	**15**	6	0	0
b) Den numeriske tilnærminga har hjulpet meg til å forstå teorien bedre	5	**12**	**12**	2	0
c) Den numeriske tilnærminga gjør at jeg føler meg godt rustet til å løse kvantitative/matematiske utfordringer i framtida	6	9	**12**	3	0
d) Kodinga i undervisninga har vært en kompliserende faktor	5	7	7	4	7
e) Vi har lært for lite om algebraiske og analytiske teknikker	0	4	**16**	8	2
f) Jeg hadde helst sett at vi bare løste oppgaver med papir, blyant og kalkulator	7	4	7	3	8
g) Numerikk/kode og teori utfyller hverandre	6	**14**	5	4	0
h) Vi kunne godt ha brukt mer tid på implementere flere og mer avanserte numeriske metoder	1	6	**10**	5	5
i) Jeg har stort sett bare brukt ferdige løsningsforslag for skriptene og ikke egentlig forstått noe særlig av de numeriske metodene	0	2	8	**10**	**9**

Andre observasjonar

- I forkant: ville skrive kode, varierande evner.

- Hårete oppgåver: Nokre (få) prioriterte dei/fekk dei til.

- Java vs. MATLAB – ikkje så nøye.

Python?

Populært grensesnitt: Live Script i MATLAB (~ Jupyter).

Andre observasjonar

- I forkant: ville skrive kode, varierande evner.

- Hårete oppgåver: Nokre (få) prioriterte dei/fekk dei til.

- Java vs. MATLAB – ikkje så nøye.

Python?

Populært grensesnitt: Live Script i MATLAB (~ Jupyter).

```
S=0;          % Initierer sum
for i=1:20
  S=S+i^2;    % Legg til neste ledd
end
S             % Resultat til skjerm
```

VS.

$$S = \sum_{n=1}^{20} n^2$$

«Dommen»: var det fleire som *stod* enn som strauk?

«Dommen»: var det fleire som *stod* enn som strauk?

JA!

«Dommen»: var det fleire som *stod* enn som strauk?

JA!

-i alle fall *litt* fleire