

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 5
Innleveringsfrist: 15. april klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Løsningsforslag

Oppgave 1

- a) I hver forgrening må summen av det som renner inn og det som renner ut være like; hvis ikkje ville jo vann forsvinne eller oppstå. Det gjør oss i stand til å sette opp følgende likninger:

$$\begin{aligned}I_1 &= I_2 + I_3 \\I_2 + I_4 &= I_5 \\I_3 + I_5 &= I_6\end{aligned}$$

Om vi lar ukjente størrelser stå på venstre side, og setter inn kjente størrelser, i l/s, høyre side, får vi

$$\begin{aligned}I_1 - I_2 &= I_3 = 2 \\I_2 - I_5 &= -I_4 = -6 \\I_5 &= I_6 - I_3 = 9 - 3 = 7 \quad ,\end{aligned}$$

eller som matriselikning:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Her ser vi direkte at I_5 er 7 l/s. Setter vi dette inn i de to første likningene, får vi, i l/s, at $I_2 = -6 + I_5 = -6 + 7 = 1$ og $I_1 = 2 + I_2 = 2 + 1 = 3$. Alternativt kan vi gjøre det på “standardmetoden”; vi setter opp totalmatrisa til systemet og rekkereduserer¹:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Løsninga blir altså at $I_1 = 3$ l/s, $I_2 = 1$ l/s og $I_3 = 7$ l/s.

¹Denne er faktisk allerede trappeform, vi reduserer videre til *redusert* trappeform.

b) I dette tilfellet vil vi få følgende likninger:

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1 \\ I_2 - I_5 &= I_4 \\ I_3 + I_5 &= I_6 \quad , \end{aligned}$$

eller på matriseform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad .$$

Koeffisientmatrisa kan rekkereduseres slik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Vi ser at vi ikke får noe ledende tall i søyle 3, så I_5 – og dermed også I_2 og I_3 – vil forbli ubestemt. Dette er kanskje ikke så overraskende. Om vi ser på rørsystemet som helhet, ser vi at $I_1 + I_4$ er den totale strømmen inn og I_6 er den totale strømmen ut. Følgelig må vi ha at $I_1 + I_4 = I_6$ – helt uavhengig av hva I_2 , I_3 og I_5 er.

c)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2-s & 1 \\ 0 & s & 2 \\ 2 & 4 & s+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2-s & 1 \\ 0 & s & 2 \\ 0 & 2s & s+2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} s & 2 \\ 2s & s+2 \end{vmatrix} = \\ &= s(s+2) - 2s \cdot 2 = s^2 - 2s = \underline{s(s-2)} \quad . \end{aligned}$$

Her har vi først lagt 2 ganger rekke 1 til rekke 3 og så utført en kofaktorekspansjon langs søyle 1.

For at A skal være invertibel, må determinanten være ulik 0. Altså er A invertibel for alle s utanom 0 og 2.

d) Vi setter opp matrisa $[A|I_3]$ med $s = 1$ insatt i A , og rekkereduserer denne

til vi får I_3 til venstre. Vi vil da ha A^{-1} til høyre.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} &. \end{aligned}$$

Altså:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi lar også Octave regne ut A^{-1} :

```
> s=1;
> A=[1 2-s 1; 0 s 2; 2 4 s+4]
A =
```

```
1 1 1
0 1 2
2 4 5
```

```
> inv(A)
ans =
```

```
3 1 -1
-4 -3 2
2 2 -1
```

Vi ser at dette stemmer med svaret vi fant selv.

- e) Vi ser at koeffisientmatrisa til likningssystemet er A ; likningssystemet kan skrives som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $\mathbf{b} = [s, 1, 6]^T$. Vi veit at denne er invertibel for alle s ulik 0 og 2. Løsninga kan da skrives som $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Liningssystemet har entydig løsning når $s \notin \{0, 2\}$.

Vi undersøker spesielt hva som skjer når $s = 0$ og $s = 2$. For $s = 0$ får vi denne totalmatrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Av den nederste rekka ser vi at linkningssystemet er inkonsistent når $s = 0$.

For $s = 0$ blir totalmatrisa til likningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Vi ser at matrisa på trappeform ikke har noe ledende tall i søyle 3. Videre inneholder ikke likningssystemet noen selvmotsigelser. x_3 vil derfor være ubestemt og systemet har uendelig mange løsninger for $s = 2$.

Oppgave 2

a) Denne differensiallikninga er separabel

$$\begin{aligned} (1+x^2) \frac{dy}{dx} - e^{-y} &= 0 \\ (1+x^2) \frac{dy}{dx} &= e^{-y} \\ e^y dy &= \frac{1}{1+x^2} dx \\ \int e^y dy &= \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ e^y &= \arctan x + C \\ y &= \ln(\arctan x + C) \end{aligned}$$

Vi bestemmer C ved initialkravet:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ \ln(\arctan 0 + C) &= 0 \\ \ln C &= 0 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Løsning:

$$\underline{y(x) = \ln(\arctan x + 1)} .$$

b) Denne differensiallikninga er hverken lineær eller separabel. Vi løser den ved å bruke Eulers metode. Den kan implementeres slik:

```
% Implementering av Eulers metode
% Initialkravet er "hard-koda". Start og slutt er også fiksert
% i koden. Antall steg blir lest inn fra kommandolinja.
% y' blir gitt ved funksjonsfila DerivFunk.

% Fjærner gamle variable
```

```

clear all

% Bestemmer initialkravet
y0=2;

% Velger start- og slutt for x
xStart=0;
xSlutt=10;

% Fikserer antall steg
N=input('Gi antal steg: ');
% Regner ut steg-lengda
h=(xSlutt-xStart)/N

% Lager en vektor med alle aktuelle x-verdier
xVektor=xStart:h:xSlutt;

% Vi initierer en vektor med tilsvarende y-verdier
% Den første komponenten skal være gitt ved initialkravet
yVektor(1)=y0;

for i=1:N
    y=yVektor(i);      % Bestemmer den aktuelle y-verdien
    x=xVektor(i);      % Bestemmer den aktuelle x-verdien
    yD=DerivFunk(y,x); % Bestemmer den deriverte av y (gitt ved diff.-likn.)
    yVektor(i+1)=y+yD*h; % Beregner neste steg ved Eulers metode
end

% Plotter resultatet
hold on
plot(xVektor,yVektor,'k')

```

Vi har kalt dette skriptet 'EulersMetode.m'. Som vi ser i linje 14, har vi valgt å la x gå til 10. Vi bruker 'hold on'-funksjonen for å kunne plotte resultatet med ulike antall steg i samme figur. Dette er viktig for å sjekke konvergens – altså at resultatet ikke er avhengig av steglengda. Skriptet kaller funksjonsfila `DerivFunk.m`, som ser slik ut:

```

function F=DerivFunk(y,x)

% Funksjonsfil som blir brukt i EulersMetode.
% Funksjonen tar to input-argument: y og x.

F=sin(y)+sqrt(x);

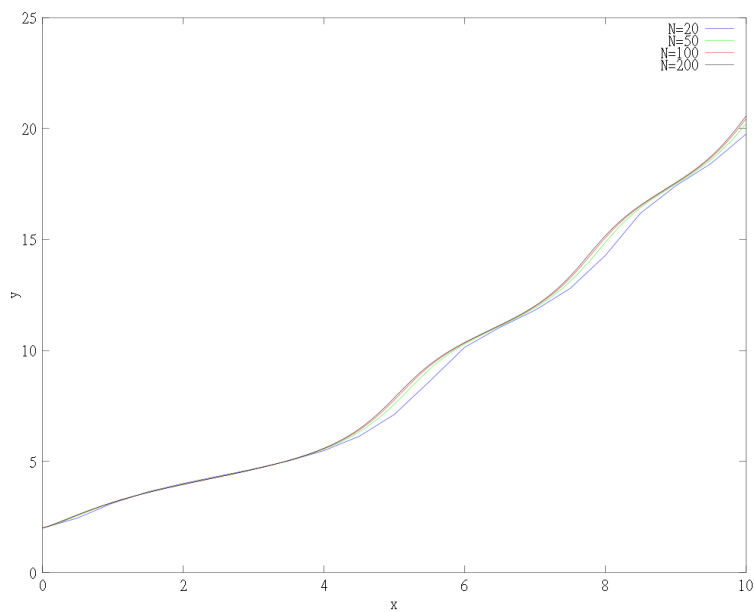
```

Det er her selve differensiallikninga blir implementert.

Vi kjører skriptet med stadig flere steg (N):

```
> EulersMetode
Gi antal steg: 20
h = 0.50000
> EulersMetode
Gi antal steg: 50
h = 0.20000
> EulersMetode
Gi antal steg: 100
h = 0.10000
> EulersMetode
Gi antal steg: 200
h = 0.050000
```

Resultatet er vist i figur 1. Vi har brukt ulike farger på de ulike plottene for lettere å se forskjell på dem. Vi ser veldig liten forskjell på grafene for $N = 100$ og $N = 200$, så vi renger med at plottet er praktisk talt uavhengig av steglengda h for N -verdier større enn 100. Om vi hadde brukt midtpunktsmetoden i stedet, hadde nok svaret konverget langt raskere.



Figur 1: Svaret på oppgave 1b).

- c) Denne differensiallikninga er linær. Vi løser den ved å bruke integrerende faktor. Vi ganger begge sider med $e^{F(x)}$ der F en antiderivert til 2. Vi velger $F = 2x$:

$$\begin{aligned} y' + 2y &= x \\ e^{2x}(y + 2y') &= e^{2x} \cdot x \\ (e^{2x}y)' &= xe^{2x} \\ e^{2x}y &= \int xe^{2x} dx \end{aligned}$$

Integralet på høyre side løser vi ved delvis integrasjon:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{2x} \Leftarrow v = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$$

$$\int xe^{2x} dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Vi får:

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \\ y &= e^{-2x} \left(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

Vi bestemmer C ved initialkravet:

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} + Ce^{-2 \cdot 0} &= -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + C &= -\frac{1}{4} \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Løsning:

$$\underline{y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}} \quad .$$

Oppgave 3

a) Differensiallikninga er separabel:

$$\begin{aligned}\frac{dh_1}{dt} &= -k_1 \sqrt{h_1} \\ \frac{dh_1}{\sqrt{h_1}} &= -k_1 dt \\ \int h_1^{-1/2} dh_1 &= \int -k_1 dt \\ \frac{1}{-1/2+1} h_1^{-1/2+1} &= -k_1 t + C_1 \\ 2\sqrt{h_1} &= -k_1 t + C_1 \\ \sqrt{h_1} &= -\frac{k_1}{2} t + C_2 \quad (C_2 = C_1/2) \\ h_1 &= \left(C_2 - \frac{k_1}{2} t\right)^2.\end{aligned}$$

Konstanten C_2 blir bestemt ved initialkravet:

$$\begin{aligned}h(0) &= h_0 \\ \left(C_2 - \frac{k_1}{2} \cdot 0\right)^2 &= h_0 \\ C_2 &= \sqrt{h_0}.\end{aligned}$$

(C_2 kan for så vidt også være $-\sqrt{h_0}$. Men dette vil gi en funksjon som tilsier at vannstanden *øker* i tanken.) Vi får:

$$h_1(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k_1}{2} t\right)^2 \quad (\text{q.e.d.})$$

b) Vi ser at løsninga over er en andregradsfunksjon. Videre ser vi at den avtar for $0 \leq t \leq t_k$, der

$$t_k = 2\sqrt{h_0}/k_1.$$

For $t = t_k$ er uttrykket lik 0, mens det vil øke mot uendelig for $t > t_k$. Dette siste er selvsagt helt urimelig; når tanken er tom, vil den forbli tom (om vi ikke fyller på). For at funksjonen skal være gyldig for alle $t \geq 0$, skriver vi den ved hjelp av delt forskrift:

$$h_1(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{h_0} - \frac{k_1}{2} t\right)^2, & 0 \leq t \leq t_k \\ 0, & t > t_k \end{cases}$$

Er dette også en løsning av differensiallikninga over? Vi har alt sett at det er det for $t < t_k$ – og at den oppfyller initialkravet. For $t > t_k$, er h_1 identisk

lik 0. Derfor er også $h'(t)$ identisk lik 0 for $t > t_k$, og differensiallikninga er oppfylt også i dette området. Spørsmålet er om differensiallikninga er oppfylt for $t = t_k$. Og er $h'_1(t_k)$ i det hele tatt veldefinert? Svaret er ja på begge spørsmålene:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow t_k^-} h_1(t) &= \lim_{t \rightarrow t_k^+} h_1(t) = h_1(t_k) = 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{h_1(t_k + \Delta t) - h_1(t_k)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{h_0} - k_1/2 \cdot (t_k - |\Delta t|))^2 - 0}{\Delta t} = \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0^-} \frac{(k_1/2 \cdot |\Delta t|)^2}{\Delta t} &= 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{h_1(t_k + \Delta t) - h_1(t_k)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{0 - 0}{\Delta t} = 0 \quad .\end{aligned}$$

Altså er både $h'_1(t_k)$ og $h_1(t_k)$ lik 0, og differensiallikninga er oppfylt også for $t = t_k$ ².

- c) Vi bruker de samme skriptet og den samme funksjonsfila som i deloppgave 2 b). Vi må gjøre noen små justeringer: Vi setter `y0=10`. Og vi bør la `xSlutt` være noe større enn t_k , som er ca 1414 s. Vi setter `xSlutt=1600`. Til slutt må vi endre fila `DerivFunk.m`; den siste linja blir³

```
F=-sqrt(2*10)*.01/10*sqrt(y);
```

Her har vi satt inn $k_1 = \sqrt{2g} a/A \approx \sqrt{2 \cdot 10} \cdot 0.01/10$ – målt i $\text{m}^{1/2}/\text{s}$. Resultatet for tre ulike valg av steglengder er vist i figur 2. Det er vanskelig å se forskjell på den numeriske og den eksakte løsninga når vi har brukt $N = 100$ steg, noe som tilsvarer en steglengde på $h = 16$.

- d) Fasongen på vanntårnet kommer fram ved å la x -aksen peke oppover og rotere $f(x)$ rundt denne aksen. Den kan minne om en trompet. Se figur 3.

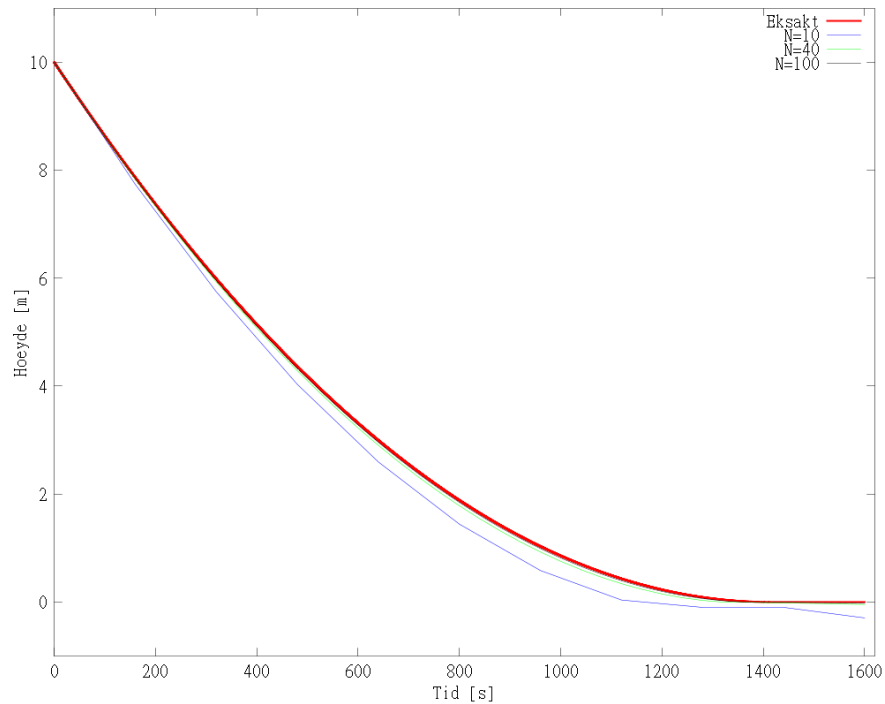
Volumet av slike omdreiningslegemer kan vi finne ved formelen $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. I vårt tilfelle ser integralet slik ut:

$$V = \int_0^{10} \pi \left[0.6 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{28} x \right) \right]^2 dx \quad .$$

Vi løser dette integralet numerisk ved trapesmetoden. Det kan implementeres slik:

²Den type flertydighet vi her ser, lar seg ofte fjerne ved å innføre tillegskrav på løsningen – som for eksempel at den skal være kontinuerlig og deriverbar i hele definisjonsmengda. I dette tilfellet ser vi at løsningene fra både a) og b) oppfyller disse kravene.

³I dette tilfellet er faktisk funksjonen uavhengig av x , så det er egentlig unødvendig å ha med denne variabelen i argument-lista. Vi har likevel valgt å beholde argumentlisat slik den er for at det skal være lett å justere de filene vi har til å løse andre initialverdiproblemer.

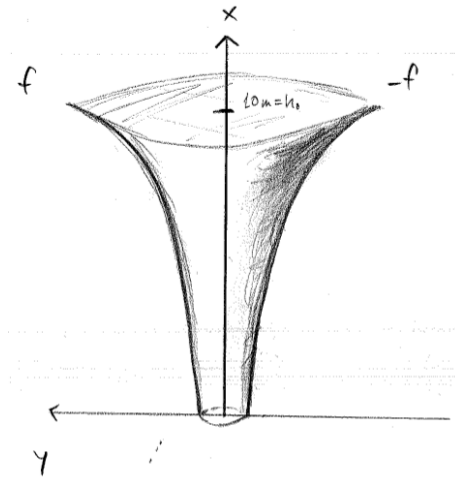


Figur 2: Svaret på deloppgave 3c). Figuren viser både numerisk og analytisk løsning av likning (1) i oppgavesettet.

```
% Skript som integrerer funksjonen gitt i funksjonsfila
% Integrand.m. Integrasjonsgrensene er hard-koda.

% Integrasjonsgrenser
a=0;
b=10;

% Vi bestemmer antall del-intervall::
N=input('Antall del-intervall: ');
DeltaX=(b-a)/N;
% Vektor med alle x-verdiar:
Xvektor=a:DeltaX:b;
% Antal element i vektoren:
M=length(Xvektor);
```



Figur 3: Skisse av volumet vi skal regne ut i deloppgave 3d).

```
% Regner ut integralet ved trapes-metoden:
Sum=0;
% Første ledd i summen
x=Xvektor(1);
FunkVerdi=Integrand(x);
Sum=Sum+0.5*DeltaX*FunkVerdi;
% Summen av ledd nr. 2 t.o.m. nest siste ledd:
for indeks=2:(M-1)
    x=Xvektor(indeks);
    FunkVerdi=Integrand(x);
    Sum=Sum+DeltaX*FunkVerdi;    % For alle andre ledd i summen
end
% Siste ledd i summen
x=Xvektor(M);
FunkVerdi=Integrand(x);
Sum=Sum+0.5*DeltaX*FunkVerdi;

% Skriver svaret til skjerm:
IntegralEstimat=Sum
```

Vi har gitt dette skriptet navnet `TrapezInt.m`. Skriptet kaller ei funksjonsfil vi har kalt `Integrand.m`:

```
function I=Integrand(x)
```

```
% Funksjon som blir brukt av TrapezInt.m
```

```
% -Det som skal integreres
```

```
f=0.6+(tan(pi*x/28))^2;  
I=pi*f^2;
```

Vi kjører skriptet i Octave:

```
> TrapesInt  
Antall del-intervall: 10  
IntegralEstimat = 106.40  
> TrapesInt  
Antall del-intervall: 50  
IntegralEstimat = 100.48  
> TrapesInt  
Antall del-intervall: 100  
IntegralEstimat = 100.29  
> TrapesInt  
Antall del-intervall: 200  
IntegralEstimat = 100.24  
> TrapesInt  
Antall del-intervall: 500  
IntegralEstimat = 100.23
```

Vi får altså volumet 100.2 m³, som er rimeleg nære volumet av sylinder-tanken; $h_0 A = 10 \text{ m} \cdot 10 \text{ m}^2 = 100 \text{ m}^3$.

- e) Vi bruker det samme skriptet som i deloppgave b). Det eneste vi forandrer er siste linja i funksjonfila `DerivFunk.m`:

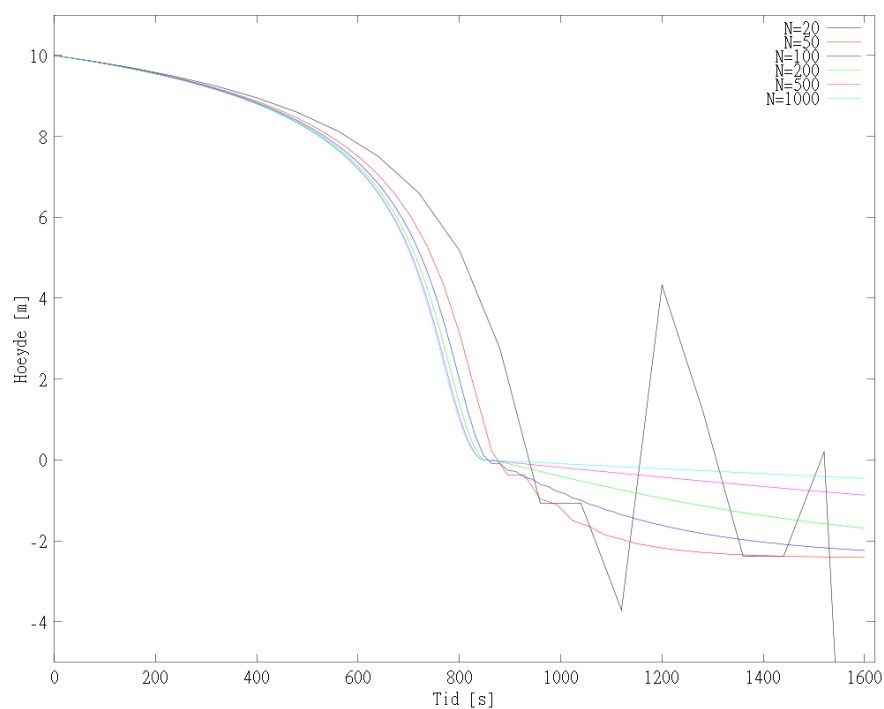
```
F=-.0142*sqrt(y)/(.6+(tan(pi/28*y))^2)^2;
```

Vi kjører skriptet for stadig mindre steglengde:

```
> EulersMetode  
Gi antal steg: 20  
h = 80  
> EulersMetode  
Gi antal steg: 50  
h = 32  
> EulersMetode  
Gi antal steg: 100  
h = 16  
> EulersMetode  
Gi antal steg: 200  
h = 8  
> EulersMetode
```

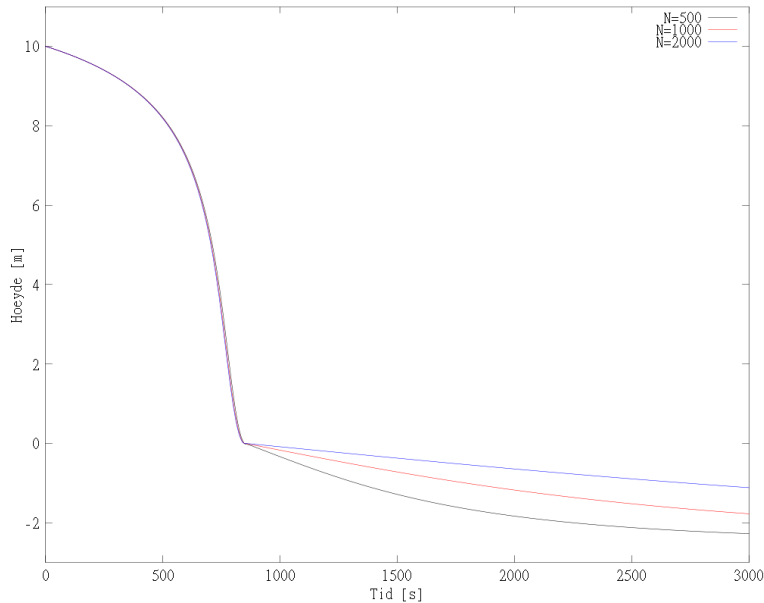
```
Gi antal steg: 500
h = 3.2000
> EulersMetode
Gi antal steg: 1000
h = 1.6000
```

Plottet vi får ut, er vist i figur 4. Legg merke til at det var langt vanskeligere å få konvergert $h_2(t)$ enn $h_1(t)$.



Figur 4: Svaret i deloppgave 3e). Figuren viser vannhøyden som funksjon av tid for “trompet-tårnet” (se figur 3).

- f) Ut fra figur 4, ser det ut til at vannhøyden blir negativ for store t . Vi undersøker dette nærmere ved å sette en høyere verdi for x_{Slutt} . Vi har valgt $x_{\text{Slutt}}=3000$. Med ulike, men relativt høye, antall steglengder får vi oppførselen skissert i figur 5. I alle de utregningene vi har gjort her, får vi negativ h_2 for store t . Vi ser også at dette problemet blir mindre og mindre etter hvert som h blir mindre og mindre.



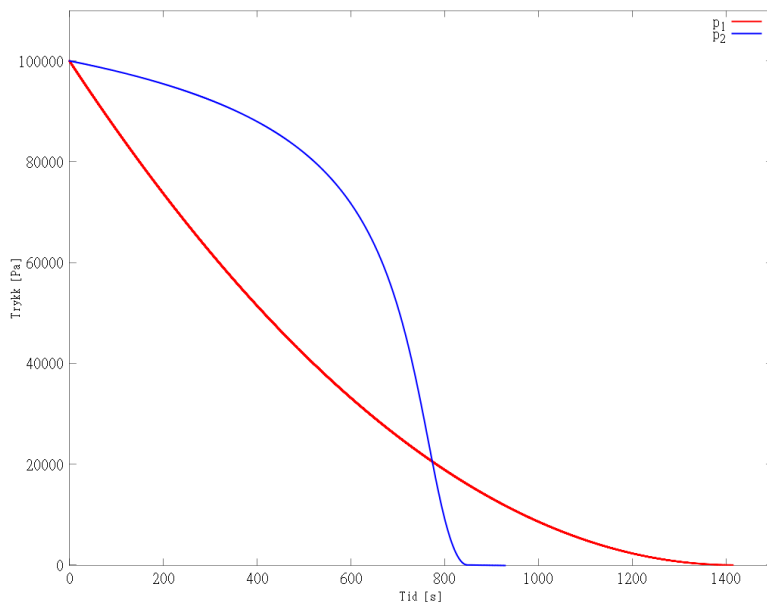
Figur 5: Figuren, som er en del av svaret i deloppgave 3f), viser tendensen for den numeriske løsningen når t blir stor. Vi får negativ h_2 , noe som selvsagt er urimelig. Retnok ser løsningen ut til å gå mot at $h_2 = 0$ for store t , men veldig sakte.

- g) Vi tar utgangspunkt i den analytiske løsningen for h_1 og en konvergent numerisk løsning for h_2 og plotter de to trykkene i samme koordinatsystem. Dette kan gjøres slik i kommandovinduet i Octave:

```
> k1=sqrt(2*10)*.01/10;
> h0=10;
> tk=2*sqrt(h0)/k1;
> t=0:1e-2:tk;
> h1=(sqrt(h0)-k1/2*t).^2;
> p1=1000*10*h1;
> plot(t,p1,'r','linewidth',2)
> EulersMetode
Gi antal steg: 5000
h = 0.32000
> p2=1000*10*yVektor;
> hold on
> plot(xVektor ,p2,'b-','linewidth',2)
```

```
> legend('p_1','p_2')
> xlabel('Tid [s]')
> ylabel('Trykk [Pa]')
> axis([0 1500 -100 110000])
```

Resultatet er vist i figur 6.



Figur 6: Svaret på deloppgave 3g). Figuren viser trykket i røret som funksjon av tid for de to vanntårnene.

Av figuren ser vi klart og tydelig at trykket holder seg relativt jevnt for “trompettårnet”, før det synker brått, mens det allerede fra starten avtar raskt for sylindertårnet. Siden det er ønskelig å holde vanntrykket relativt stabilt, vil nok “trompet-fasongen” være å foretrekke i mange sammenhenger. Dersom vanntårnet er plassert på en høyde, vil denne forskjellen være ganske marginal, derimot.

- h) I det første tilfellet er volumet av tanken $V = Ah_1$, slik at den deriverte av denne er $V'(t) = Ah_1'(t)$. $V'(t)$ representerer endringen i volumet av vannet per tid. Når vi vet at vannet renner ut med farten $v(t)$ i bunnen, kan vi også finne $V'(t)$ på en annen måte. Dersom Δt er liten, vil farten $v(t)$ endre seg lite mellom tidspunktene t og $t + \Delta t$. Vi kan derfor regne med at “lengda” av vannsøyla som har runnet ut er $v\Delta t$ slik

at volumendringa blir $\Delta V = -va \Delta t$, eller $\Delta V/\Delta t = -va$. Fortegnet er negativt fordi V minker. Om vi lar Δt gå mot null, får vi at⁴ $V'(t) = -va$.

Vi har altså to ulike uttrykk for $V'(t)$. Selvsagt må disse være like:

$$\begin{aligned} Ah'_1(t) &= -v(t)a \\ Ah'_1 &= -\sqrt{2gh_1}a \\ h'_1 &= -\sqrt{2g} \frac{a}{A} \sqrt{h_1} = -k_1 \sqrt{h_1} \quad \text{med} \quad k_1 = \sqrt{2g} \frac{a}{A} \quad (\text{q.e.d.}) \end{aligned}$$

I det andre eksempelet er det litt mer komplisert å finne et uttrykk for $V'(t)$. Men vi vet at

$$V(t) = \int_0^{h_2(t)} \pi[f(x)]^2 dx \quad .$$

Vi lar $F(x)$ være en anti-derivert til integranden $\pi[f(x)]^2$, slik at $V(t) = F(h_2(t)) - F(0)$. Vi deriverer denne ved hjelp av kjerneregelen:

$$V'(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dF(h_2)}{dh_2} \cdot \frac{dh_2}{dt} - (F(0))' = \pi[f(h_2)]^2 \cdot h'_2(t) - 0 \quad .$$

Som før skal $V'(t)$ også være lik $-va = -\sqrt{2gh_2}a$ slik at

$$\begin{aligned} \pi[f(h_2)]^2 h'_2(t) &= -\sqrt{2gh_2}a \\ h'_2 &= -\frac{\sqrt{2ga}}{\pi} \frac{\sqrt{h_2}}{[f(h_2)]^2} = -k_2 \frac{\sqrt{h_2}}{[f(h_2)]^2} \quad \text{med} \quad k_2 = -\sqrt{2g} \frac{a}{\pi} \quad (\text{q.e.d}) \end{aligned}$$

⁴Dette resonnementet kan gjøres litt mer presist. Se eksempel 4.6.4 side 202 i læreboka.