

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
 Oppgavesett 5
Innleveringsfrist: Mandag 15. april klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Viktige påminnelser:

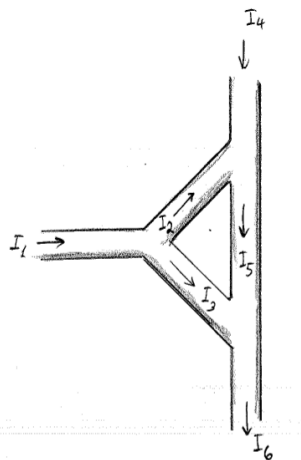
- Husk at alle svar skal begrunnes. Ta med alle nødvendige utregninger i besvarelsen – både de som er gjort med papir og blyant og de som er gjort i Octave/Matlab. Alle skript og funksjonsfiler som har blitt brukt, skal være med i besvarelsen. Selvsagt er det helt greit å ta utgangspunkt i skript man har brukt før.
- Vi forutsetter at både analyse- og numerikk-oppgaver blir gjort. Dersom det ene av disse to er fraværende i besvarelsen, vil den ikke bli godkjent – uansett hvor bra det andre er gjort.
- Vi minner også om at oppgavene er gitt individuelt. Selv om det er greit å samarbeide, vil vi ikke akseptere besvarelser som er identiske med andres.
- Husk å bruke forsidemalen når du leverer.

Oppgave 1

- a) Ein del av et avløpssystem er vist i figur 1. De seks ulike del-strømmene $I_1, I_2, \dots, I_6$ er også illustrert. Dersom vi måler at $I_3 = 2$ l/s (liter per sekund), $I_4 = 6$ l/s og $I_6 = 9$ l/s, hva blir de andre del-strømmene?
- b) Om vi i stedet hadde målt I_1, I_4 og I_6 , hadde vi da klart å bestemme de andre del-strømmene?
- c) Hva er determinanten til matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-s & 1 \\ 0 & s & 2 \\ 2 & 4 & s+4 \end{bmatrix}$? For hvilke verdier av s er A invertibel?
- d) Hva blir A^{-1} når $s = 1$? Kontrollér svaret i Octave/Matlab.
- e) Gitt likningssystemet

$$\begin{aligned}x_1 + (2-s)x_2 + x_3 &= s \\sx_2 + 2x_3 &= 1 \\2x_1 + 4x_2 + (s+4)x_3 &= 6\end{aligned}$$

Bruk svaret i c) til å bestemme s slik likningssystemet har entydig løsning. For hvilke verdier av s har systemet henholdsvis ingen løsning og uendelig mange løsninger?



Figur 1: Skisse av ein del av eit rørsystem. Figuren hører til oppgave 1 a) og b).

Oppgave 2

I denne oppgava er det gitt tre initialverdiproblem. Alle de tre differensiallikningene er av første orden. Ën av dem er lineær, òn er separabel og òn av dem er ingen av delene. Velg den løsningsmetoden som passer best for hver av oppgavene. Eventuelle numeriske løsninger kan du gi i form av et plott. Om du gjør dette, bestem selv et passende x -intervall for plottet.

a)

$$(1 + x^2)y' - e^{-y} = 0, \quad y(0) = 0 \quad .$$

b)

$$y' = \sin y + \sqrt{x}, \quad y(0) = 2 \quad .$$

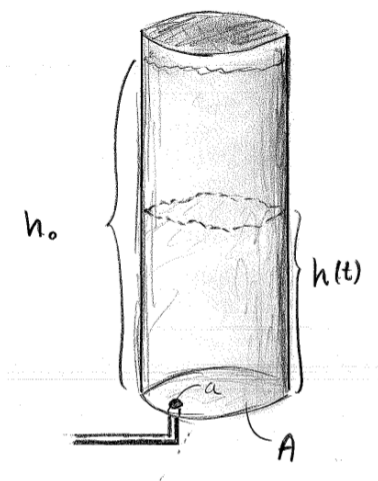
c)

$$y' + 2y = x, \quad y(0) = -1/4 \quad .$$

Oppgave 3

- a) Et vanntårn har fasong som en sylinder. Arealet av grunnflata kaller vi A . Vann renner ut gjennom et rør kobla til bunnen av tårnet. Dette røret har tverrsnitt a . Ved tidspunktet $t = 0$ er høyden av vannet i vanntårnet h_0 . Se figur 2. Om vi lar $h_1(t)$ være vannhøyden ved tidspunkt t , vil denne oppfylle differensiallikninga

$$h_1'(t) = -k_1 \sqrt{h_1(t)} \quad , \quad (1)$$



Figur 2: Skisse av vanntårn med sylinder-fasong. Figuren hører til oppgave 3.

der $k_1 = \sqrt{2g}a/A$ og $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ er tyngdeakselerasjonen.

Vis hvordan vi kommer fram til følgende funksjonsuttrykk for h_1 :

$$h_1(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k_1}{2} t \right)^2 .$$

- b) Bruk blant annet sunn fornuft til å bestemme gyldighetsområdet til funksjonen over. Skriv opp funksjonen $h_1(t)$ slik at den er gyldig for alle $t \geq 0$. Er *denne* funksjonen fremdeles en løsning av differensiallikninga over?
- c) Vi setter $h_0 = 10 \text{ m}$, $a = 0.01 \text{ m}^2$ og $A = 10 \text{ m}^2$. Løs differensiallikninga over numerisk og kontroller at svaret konvergerer mot den analytiske løsningen fra deloppgave a).
- d) Et annet vanntårn, som i utgangspunktet er helt fullt av vann, har profil gitt ved funksjonen

$$f(x) = 0.6 + \tan^2\left(\frac{\pi}{28}x\right), \quad D_f = [0, 10] .$$

der x er høyden målt i meter. Vis at volumet av vannet i dette tårnet er omtrent det samme som i sylindren ved $t = 0$. (*Hint:* Det kan være at det aktuelle uttrykket ikke har noen elementær anti-derivert.)

- e) Også fra dette tårnet tapper vi vann gjennom et rør med tverrsnitt $a = 0.01 \text{ m}^2$. Høyden av vannet i tårnet, som vi kaller $h_2(t)$, oppfyller følgende differensiallikning:

$$h_2'(t) = -k_2 \cdot \frac{\sqrt{h_2}}{[f(h_2)]^2} . \quad (2)$$

Faktoren $k_2 = \sqrt{2g}a/\pi \approx 0.0142$ med enheten $\text{m}^{5/2}/\text{s}$. Med samme initialkrav som før, løs denne differensiallikninga ved hjelp av Eulers metode¹ (“vanlig” eller midpunkt). Gi svaret i form av et plott. Husk å passe på at svaret ikke varierer nevneverdig med steglengda.

- f) Hva skjer med den numeriske løsningen fra deloppgave e) for høye verdier av t ?
- g) Trykket i røret, p , er proporsjonalt med høyden h ;

$$p(t) = \rho gh(t) \quad ,$$

der $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ er vannets tetthet. Plott dette trykket for hvert av de to tårnene i samme koordinatsystem.

Ut fra dette plottet: Hvilken fasong vil være mest hensiktsmessig om man skal bygge et vanntårn?

- h) **NB: Denne oppgava er for spesielt interesserte; du blir *ikke* trukket om du ikke gjør den. Du får uttelling, derimot, om du velger å gjøre den.**

Fra Bernoulli-likniga i fysikk kan en komme fram til at farten til vannet som renner ut gjennom røret i bunnen, er $v = \sqrt{2gh}$. Bruk dette til å vise hvordan man kan komme fram til differensiallikningene (1) og (2) i henholdsvis deloppgave a) og e).



Figur 3: Vanntårnet “Svampen” i Örebro i Sverige. Kilde: <http://www.orebro.se/1636.html>

¹Denne likninga er faktisk separabel. Likevel vil nok de fleste være enig i at en numerisk løsning vil være å foretrekke her.