

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 4
Innleveringsfrist: 8. mars klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Løsningsforslag

Oppgave 1

- a) Om vi tenker oss at vi spiser x_1 hg banan, drikker x_2 hg lettmelk og spiser graut laga av x_3 hg havregryn, vil vi, i følge tabellen, få i oss $1 \cdot x_1 + 3x_2 + 11x_3$ gram protein, $0 \cdot x_1 + 2x_2 + 8x_3$ gram fett og $18x_1 + 5x_2 + 62x_3$ gram karbohydrat. Siden disse mengdene skulle være 6 gram, 4 gram og 40 gram, henholdsvis, får vi dette likningssettet:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & = & 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & = & 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & = & 40 \end{array} .$$

- b) Totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 40 \end{bmatrix}$$

Vi rekkereduserer denne til redusert trappeform:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 40 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -49 & -136 & -68 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -49 & -136 & -68 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 60 & 30 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av dette ser vi at $x_1 = 1/2$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1/2$. Vi får altså spise 50 g banan og 50 g graut. Dietten tillater ikke at vi drikker melk.

Vi kan utføre rekkeoperasjonene ved å bruke funksjonsfilene fra numerikksettet i uke 6 og 7:

```
> T=[1 3 11 6; 0 2 8 4; 18 5 62 40]
```

```
T =
```

```

    1     3    11     6
    0     2     8     4
   18     5    62    40
```

```
> T1=LeggeTilMultiplum(T,-18,1,3)
```

```
T1 =
```

```

    1     3    11     6
    0     2     8     4
    0   -49  -136   -68
```

```
> T2=GangeRekke(T1,1/2,2)
```

```
T2 =
```

```

    1     3    11     6
    0     1     4     2
    0   -49  -136   -68
```

```
> T3=LeggeTilMultiplum(T2,49,2,3)
```

```
T3 =
```

```

    1     3    11     6
    0     1     4     2
    0     0    60    30
```

```
> T4=GangeRekke(T3,1/60,3)
```

```
T4 =
```

```

  1.00000  3.00000  11.00000  6.00000
  0.00000  1.00000  4.00000  2.00000
  0.00000  0.00000  1.00000  0.50000
```

```
> T5=LeggeTilMultiplum(T4,-4,3,2)
```

```
T5 =
```

```

  1.00000  3.00000  11.00000  6.00000
  0.00000  1.00000  0.00000  0.00000
  0.00000  0.00000  1.00000  0.50000
```

```
> T6=LeggeTilMultiplum(T5,-11,3,1)
```

```
T6 =
```

```

  1.00000  3.00000  0.00000  0.50000
```

```
0.00000  1.00000  0.00000  0.00000
0.00000  0.00000  1.00000  0.50000
```

```
> T7=LeggeTilMultiplum(T6,-3,2,1)
T7 =
```

```
1.00000  0.00000  0.00000  0.50000
0.00000  1.00000  0.00000  0.00000
0.00000  0.00000  1.00000  0.50000
```

```
> rref(T)
ans =
```

```
1.00000  0.00000  0.00000  0.50000
0.00000  1.00000  0.00000  0.00000
0.00000  0.00000  1.00000  0.50000
```

Her har vi også kontrollert at Octave kommer fram til den samme reduserte trappeforma. Funksjonsfilene `LeggeTilMultiplum.m` og `GangeRekke.m` er, sammen med fila `ByttRekker.m`, gitt i løysingsforslaget til det nevnte numerikk-settet.

- c) Vi lar x_4 være antal hg vi spiser av egg. På venstre side i likningene over får vi et tillegg på henholdsvis $12x_4$ for protein, $16x_4$ for fett og $0x_4$ for karbohydrat. Likningssystemet blir

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & +12x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & +16x_4 & = & 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & & = & 40 \end{array} \quad ,$$

og totalmatrisa blir nå

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & 12 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 16 & 4 \\ 18 & 5 & 62 & 0 & 40 \end{bmatrix} .$$

Vi lar Octave redusere denne til redusert trappeform:

```
> M=[1 3 11 12 6; 0 2 8 16 4; 18 5 62 0 40]
M =
```

```
1    3    11    12    6
0    2     8    16    4
18    5   62     0   40
```

```
> rref(M)
ans =
```

$$\begin{array}{ccccc} 1.00000 & 0.00000 & 0.00000 & -9.06667 & 0.50000 \\ 0.00000 & 1.00000 & 0.00000 & -3.73333 & 0.00000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.00000 & 2.93333 & 0.50000 \end{array}$$

Altså, om vi skal tro Octave, er

$$\begin{aligned} x_1 - 9.067x_4 &= 0.5 \\ x_2 - 3.733x_4 &= 0 \\ x_3 + 2.933x_4 &= 0.5 \end{aligned}$$

slik at

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5 + 9.067x_4 \\ x_2 &= 3.733x_4 \\ x_3 &= 0.5 - 2.933x_4 \\ x_4 &\text{ er fri} \end{aligned}$$

Her må vi i praksis kreve at både x_1 , x_2 , x_3 og x_4 er større eller lik 0 av ganske opplagte årsaker. Dette får den konsekvensen at x_4 blir avgrensa til å ligge i intervallet $[0, 0.5/2.933]$.

Oppgave 2

Gitt:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad .$$

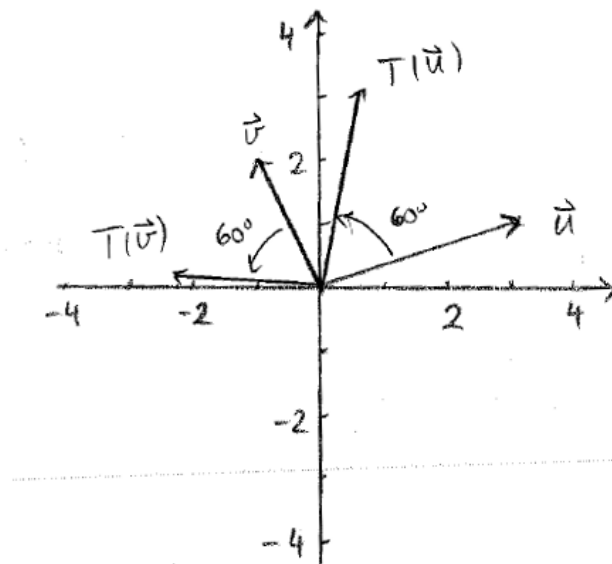
a) Med $\theta = \pi/3$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ T(\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \cdot 3 - \sqrt{3}/2 \cdot 1 \\ \sqrt{3}/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.63 \\ 3.10 \end{bmatrix} \\ T(\mathbf{v}) &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 - \sqrt{3} \\ -\sqrt{3}/2 + 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -2.23 \\ 0.13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) Se figur 1.

c) Standardmatrisa til U , som vi kan kalle A , finner vi ved å sette inn $\theta = \pi/2$ i det gitte uttrykket:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

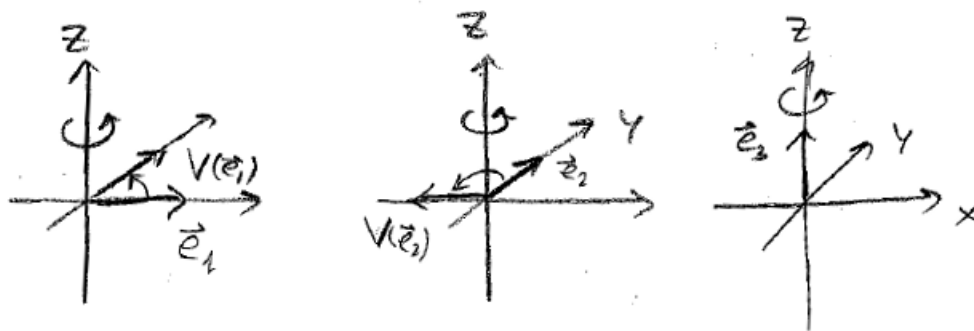


Figur 1: Svaret på deloppgave 2b).

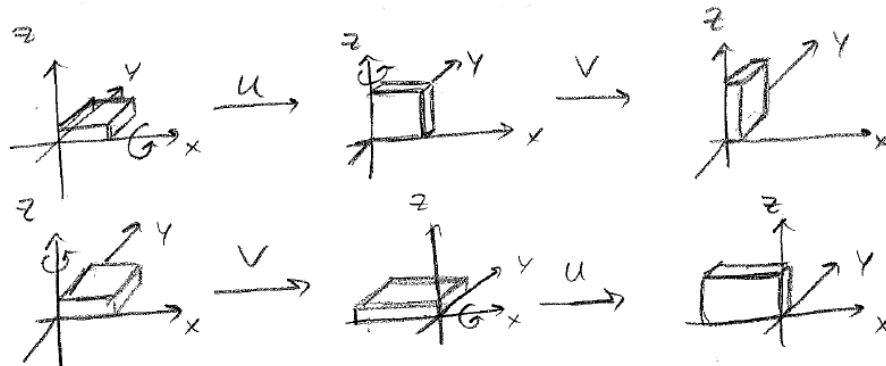
Altså kan vi skrive transformasjonen U som $U(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ der $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Standardmatrisa til V , som vi kaller B , kan vi finne ved å sette inn transformasjonen av enhetsvektorene $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_3$ som søyler, $B = [V(\mathbf{e}_1)|V(\mathbf{e}_2)|V(\mathbf{e}_3)]$.

Om vi roterer $\mathbf{e}_1$, som er parallell med x -aksen, 90° mot klokka omkring z -aksen, får vi enhetsvektoren langs y -aksen – altså $\mathbf{e}_2$. Tilsvarende vil en slik rotasjon av $\mathbf{e}_2$ gi $-\mathbf{e}_1$, mens $\mathbf{e}_3$, som er parallell med z -aksen, forblir uforandret. Se figur 2.



Figur 2: Illustrasjon til deloppgave 2c).



Figur 3: Illustrasjon til deloppgave 2d).

Dermed blir standardmatrisa

$$B = [\mathbf{e}_2 | -\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_3] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

og $V(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$.

- d) Det er tydelig at rekkefølgen vi gjør disse rotasjonane i, spiller ei rolle. Dette er illustrert i figur 3. Her ser vi at boka havner i ulike stillinger dersom vi gjør rotasjonen U først og så V eller om vi først gjør transformasjonen V og så U .

- e) Vi kan skrive de sammensatte transformasjonene slik:

$$\begin{aligned} U(V(\mathbf{x})) &= U(B\mathbf{x}) = A(B\mathbf{x}) = AB\mathbf{x} \\ V(U(\mathbf{x})) &= V(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = BA\mathbf{x} \end{aligned}$$

Av dette ser vi at standardmatrisa til den sammensatte transformasjonen $U(V(\mathbf{x}))$ er AB , og at standardmatrisa for den sammensatte transformasjonen $V(U(\mathbf{x}))$ er BA . Vi regner ut disse matriseproduktene:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser at disse to standardmatrisene er ulike, noe som bekrefter konklusjonen fra forrige deloppgave: Rekkefølgen spiller en rolle.

Oppgave 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi kan starte med å tilordne disse matrisene i Octave:

```
> A=[0 2 -1; 2 -7 3];
> B=[-1 1 1; -1 2 1; 3 -3 -2];
> C=[1 2; 2 3];
> D=[0 -3 3; 1 1 1; 2 4 0];
```

- a) A er ei 3×2 -matrise, B er ei 3×3 -matrise. Man kan bare legge sammen matriser med samme format; $A + B$ er ikke definert.

$$\begin{aligned} 3B - 2D &= 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3-0 & 3-(-6) & 3-6 \\ -3-2 & 6-2 & 3-2 \\ 9-4 & -9-8 & -6-0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -17 & -6 \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

Vi kontrollerer svarene i Octave:

```
> A+B
error: operator +: nonconformant arguments (op1 is 2x3, op2 is 3x3)
> 3*B-2*D
ans =

    -3     9    -3
    -5     4     1
     5   -17    -6
```

Vi ser at Octave gir ei feilmelding når vi forsøker å regne ut $A + B$.

b)

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-7) \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 2 \cdot 1 + (-7) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 7 & 4 \\ 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}$$

Siden B har 3 søyler og A har 2 rekker, er ikke matriseproduktet BA veldefinert.

På samme måte, siden A har 3 søyler og C har 2 rekker, er heller ikke AC definert.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-7) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-7) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -12 & 5 \\ 6 & -17 & 7 \end{bmatrix}.$$

Vi sjekker at Octave gir det samme:

```
> A*B
ans =

    -5     7     4
    14   -21   -11

> B*A
error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 3x3, op2 is 2x3)
> A*C
error: operator *: nonconformant arguments (op1 is 2x3, op2 is 2x2)
> C*A
ans =

     4   -12     5
     6   -17     7
```

c) Den transponerte av A , A^T , er den matrisa vi får når vi bytter om på rekkene og søylene i A :

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

I Octave transponerer vi slik:

```
> A.'  
ans =
```

```
0 2  
2 -7  
-1 3
```

Dersom vi hadde skrevet bare apostroff, uten punktum først, ville også elementene i A bli komplekst konjugert. Her spiller dette for såvidt ingen rolle siden alle elementene i A er reelle.

Siden A ikke har like mange søyler som rekker, er ikke A^2 definert; i produktet $A^2 = AA$ har matrisa til venstre 3 søyler og matrisa til høyre har 2 rekker.

I Octave:

```
> A^2  
error: for A^b, A must be square
```

“Square” betyr, i denne sammenhengen *kvadratisk*.

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} (-1)^2 - 1 + 3 & -1 + 2 - 3 & -1 + 1 - 2 \\ (-1)^2 - 2 + 3 & -1 + 2^2 - 3 & -1 + 2 - 2 \\ -3 + 3 - 2 \cdot 3 & 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 3 - 3 + 2^2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}}}$$

I Octave:

```
> B^2  
ans =
```

```
3 -2 -2  
2 0 -1  
-6 3 4
```

d) Vi rekkereduserer D :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi hadde brukt funksjonfilene våre for å rekkereudser, kunne det ha sett slik ut:

```

> D
D =

    0  -3   3
    1   1   1
    2   4   0

> D1=ByttRekker(D,1,2)
D1 =

    1   1   1
    0  -3   3
    2   4   0

> D2=LeggeTilMultiplum(D1,-2,1,3)
D2 =

    1   1   1
    0  -3   3
    0   2  -2

> D3=GangeRekke(D2,-1/3,2)
D3 =

    1   1   1
   -0   1  -1
    0   2  -2

> D4=LeggeTilMultiplum(D3,-2,2,3)
D4 =

    1   1   1
   -0   1  -1
    0   0   0

> D5=LeggeTilMultiplum(D4,-1,2,1)
D5 =

    1   0   2
   -0   1  -1
    0   0   0

```

Vi kontrollerer at Octave får det samme når den rekkereduserer D til redusert trappeform:

```

> rref(D)

```

ans =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at vi ikke har noen ledende ener i søyle 3. Dermed vil x_3 i likninga $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ forbli ubestemt, slik at likninga har flere løsninger enn den triviale. Altså er søylene i D lineært avhengige.