

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 4
Innleveringsfrist: 8. mars klokka 14:00
Antall oppgaver: 3

Vi minner om at alle svar skal begrunnes. Ta med alle nødvendige utregninger i besvarelsen – både de som er gjort med papir og blyant og de som er gjort i Octave/Matlab. Eventuelle script og funksjonsfiler som har blitt brukt, skal også være med i besvarelsen.

Husk å bruke forsidemalen når du leverer.

Oppgave 1

- a) Tenk deg at frokosten din består av havregraut (kokt på vann), banan og lettmelk. Tabellen nedenfor viser hvor mye protein, fett og karbohydrater 1 hg, som er det samme som 100 gram, av de tre matvarene inneholder:

Matvare	Protein	Feitt	Karbohydrat
100 g banan	1 g	0 g	18 g
100 g lettmelk	3 g	2 g	5 g
100 g havregryn	11 g	8 g	62 g

Tenk deg at du ønsker at frokosten din skal inneholde 6 g protein, 4 g fett og 40 g karbohydrater. La x_1 , x_2 og x_3 være antall hg med banan, melk og havregryn du spiser eller drikker. Forklar hvordan dette leder fram til dette likningssystemet:

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & +3x_2 & +11x_3 & = 6 \\ & 2x_2 & +8x_3 & = 4 \\ 18x_1 & +5x_2 & +62x_3 & = 40 \end{array} .$$

Hva representerer størrelsene x_1 , x_2 og x_3 ?

- b) Sett opp totalmatrisa for likningssystemet, og løs likningssystemet ved å rekkeredusere denne. Bruk gjerne de funksjonsfilene du laga i numerikksettet for uke 6 og 7 til dette.
- c) Tenk deg nå at du også tar med kokt egg i frokosten og at 100 g egg inneholder 12 g protein og 16 g fett¹. Innholdet av karbohydrater er så lavt at vi kan se bort fra det. Tenk deg også at frokosten fremdeles skal inneholde 6 g protein, 4 g fett og 40 g karbohydrater. Sett opp et likningssystem for hvor mye du nå kan spise av hver matvare. Bruk `rref`-funksjonen i

¹Egentlig er det litt mindre.

Octave/Matlab til å rekke redusere denne til redusert trappeform, og bruk dette svaret til å sette opp den generelle løsningen.



Oppgave 2

Å rotere et objekt i planet en vinkel θ omkring origo kan beskrives ved den lineære transformasjonen $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

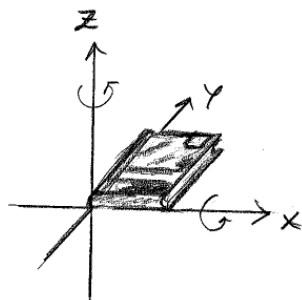
- a) La nå $\theta = \pi/3 = 60^\circ$. Finn $T(\mathbf{u})$ og $T(\mathbf{v})$ der

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- b) Tegn de fire vektorene $\mathbf{u}$, $T(\mathbf{u})$, $\mathbf{v}$ og $T(\mathbf{v})$ inn i et koordinatsystem.
- c) I rommet, $\mathbb{R}^3$, er ikke “rotasjon omkring origo” et særlig presist begrep; det er mange måter å rotere omkring origo på. Derimot kan man gjerne snakke om rotasjon omkring en akse. For eksempel har transformasjonen gitt ved rotasjon med vinkelen θ omkring x -aksen denne standardmatrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

La transformasjonene U , fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, være gitt som rotasjon $\pi/2 = 90^\circ$ omkring x -aksen, og la transformasjonen V , også fra $\mathbb{R}^3$ til $\mathbb{R}^3$, være rotasjon 90° omkring z -aksen. Finn standardmatrisene for transformasjonene U og V .



- d) Dersom vi utfører begge transformasjonene U og V på en vektor, spiller rekkefølgen vi utfører transformasjonene U og V i noen rolle?

Du kan finne svaret på dette spørsmålet ved å ta fatt i ei bok og se for deg et koordinatsystem foran deg. La x -aksen peke fra venstre mot høyre, y -aksen framover og z -aksen oppover, og legg boka i xy -planet (på bordet) med nedre venstre hjørne i origo (se figuren). Hvis du roterer den 90° omkring x -aksen og så 90° omkring z -aksen, står da boka i samme posisjon som den ville ha gjort om du i stedet først roterte den 90° omkring z -aksen og så 90° omkring x -aksen?

Illustrer svaret med ei skisse.

- e) Bekreft konklusjonen i deloppgave d) ved å sammenligne standardmatrisene til de sammensatte transformasjonene $V(U(\mathbf{x}))$ og $U(V(\mathbf{x}))$. (Disse standardmatrisene kan finnes ved å multiplisere standardmatrisene fra deloppgave c).)

Oppgave 3

Følgende matriser er gitt:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

I hver deloppgave skal du kontrollere svaret i Octave/Matlab. Denne kontrollen skal også være med i besvarelsen. Husk at dersom du kommer fram til at svaret ikke er veldefinert, skal også dette begrunnes.

- Regn ut $A + B$ og $3B - 2D$.
- Regn ut matriseproduktene AB , BA , AC og CA .
- Regn ut A^T , A^2 og B^2 .
- Rekkeredusér D til redusert trappeform, og bruk resultatet til å avgjøre om søylene i D er lineært uavhengige.