

Innlevering i BYFE/EMFE 1000
Oppgavesett 3
Innleveringsfrist: 25. januar klokka 14:00
Antall oppgaver: 4

Løysingsforslag

Oppgave 1

- a) Boksen vil, i cm, ha sidene x , $40 - 2x$ og $20 - 2x$, slik at volumet blir

$$V(x) = x(40 - 2x)(20 - 2x) = x(800 - 120x + 4x^2) = 4(200x - 30x^2 + x^3) \quad .$$

Ut frå både figuren og sjølve uttrykket for V ser vi at dette berre kan oppfattast som eit volum når $0 \leq x \leq 10$. Difor er det naturleg å velge denne definisjonsmengda: $D_V = [0, 10]$. For å finne ut når V er maksimal, deriverar vi:

$$V'(x) = 4(200 - 60x + 3x^2) = 4(3x^2 - 60x + 200) \quad .$$

Nullpunkt:

$$\begin{aligned} V'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 60x + 200 &= 0 \\ x &= \frac{-(-60) \pm \sqrt{(-60)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 200}}{2 \cdot 3} = 10 \pm \frac{10}{3}\sqrt{3} \quad . \end{aligned}$$

Bare den eine av desse to løysingane ligg i definisjonsmengda; pluss-løysinga er større enn 10. Vi får at

$$V'(x) = 4 \cdot 3(x - (10 - 10\sqrt{3}/3))(x - (10 + 10\sqrt{3}/3)).$$

Vi ser at $V'(x) > 0$ når $x < 10 - 10\sqrt{3}/3$ og at $V'(x) < 0$ når $x > 10 - 10\sqrt{3}/3$. (Her kunne vi godt ha sett opp eit forteiknsskjema.)

V er altså *maksimal* når $x = \underline{10 - 10\sqrt{3}/3} \approx 4.23$. Dette høver bra med plottet av $V(x)$ i figur 1.

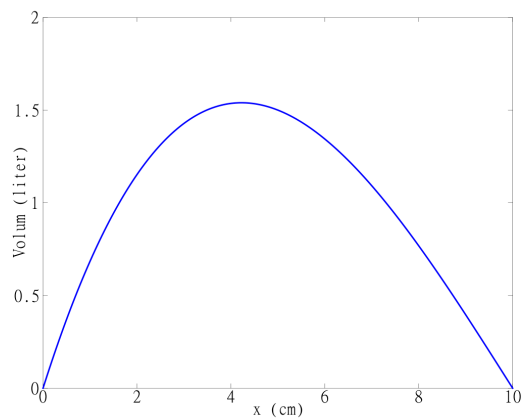
- b) $T(t) = 27 - 0.2(t - 14)^2 + e^{-0.1(t-5)}$, $D_T = [12, 18]$

Kandidatar til ekstremalpunkt:

Randpunkta (12 og 18) og punkt der $T'(t) = 0$.

$$T'(t) = -0.2 \cdot 2(t-14) + e^{-0.1(t-5)} \cdot (-0.1) = -0.1 \left(4(t-14) + e^{-0.1(t-5)} \right) \quad .$$

Det er uråd å finne nullpunkta til $T'(t)$ analytisk, så vi brukar Newtons metode her. Faktoren -0.1 er uinteressant når det gjeld å finne nullpunkt,



Figur 1: Plot av funksjonen $V(x)$ frå deloppgåve 5 a).

så vi vel å finne nulpunkta til $f(t) = 4(t - 14) + e^{-0.1(t-5)}$ ved å iterere på formelen

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} = t_n - \frac{4(t_n - 14) + e^{-0.1(t_n-5)}}{4 - 0.1e^{-0.1(t_n-5)}} \quad .$$

Newtons metode kan til dømes implementerast slik:

```
% Bestemmer x_0
x0=input('Gi x0: ');

% Initierar xNy og xGml
xNy=x0;
xGml=1e2;

% Bestemmer kor nøyaktig løysinga skal vere
Pres=1e-4;

while abs(xNy-xGml)> Pres
    xGml=xNy;
    xNy=xGml-(4*(xGml-14)+exp(-0.1*(xGml-5)))/(4-0.1*exp(-0.1*(xGml-5)));
end
% Skriv løysing til skjerm
x=xNy
```

Vi har her vald nøyaktigheita 10^{-4} . Skriptet heiter “NewtonMet.m”. Når vi køyrer det i kommandovindauga i Octave og vél $x_0 = 14$, får vi:

```
> NewtonsMet
Gi x0: 14
x = 13.897
```

Men er dette eit maksimalpunkt eller eit minimalpunkt? Og er dette det einaste punktet kor $T'(t) = 0$? Vi får nok ein god idé om dette om vi plottar grafen til T . Men vi kan også finne det ut ved å sjå på den dobbelt-deriverte:

$$T''(t) = -0.1 \left(4 - 0.1e^{-0.1(t-5)} \right) < -0.1(4 - 0.1 \cdot 1) < 0 \quad .$$

Den dobbelt-deriverte er negativ i heile definisjonsmengda. Difor må punktet vi fann vere eit lokalt *maksimalpunkt*. (jmf. side 122 i læreboka.) Sidan $T''(t)$ alltid er negativ, må T' vere strengt avtakande. Difor kan ikkje T' ha fleire enn eitt nullpunkt.

Vi reknar funksjonsverdiane for alle kandidatane:

$$\begin{aligned} T(12) &= 27 - 0.2(12 - 14)^2 + e^{-0.1(12-5)} \approx 26.7 \\ T(18) &= 27 - 0.2(18 - 14)^2 + e^{-0.1(18-5)} \approx 24.1 \\ T(13.897) &\approx 27.41 \end{aligned}$$

Temperaturen var altså høgst når $t = 13.90$, altså klokka 13:54 ($0.90 \approx 54/60$) og lågast når $t = 18$, altså klokka 18:00.

- c) $f(r) = \frac{2}{a^3} r^2 e^{-2r/a}$, der $a = 0.529 \cdot 10^{-11}$ m og $r \geq 0$.
Vi bestemmer når $f(r)$ er maksimal ved å finne nullpunktta til den deriverte:

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{2}{a^3} \left(2re^{-2r/a} + r^2 e^{-2r/a} \left(-\frac{2}{a} \right) \right) = \frac{4r}{a^3} e^{-2r/a} \left(1 - \frac{r}{a} \right) \\ f'(r) &= 0 \Leftrightarrow \\ 1 - r/a &= 0 \Leftrightarrow \\ r &= a \end{aligned}$$

Vi ser av uttrykket for den deriverte at $f'(r) > 0$ når $r < a$, og $f'(r) < 0$ når $r > a$. $r = a$ er difor eit *maksimalpunkt*; $f(r)$ er størst for $r = a$.

Oppgåve 2

Beregn disse bestemte og ubestemte integralene.

a)

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{t} + 4t^{1.4}) dt &= \int t^{1/2} dt + 4 \int t^{1.4} dt = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} t^{1/2+1} + 4 \cdot \frac{1}{1.4+1} + C = \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{4}{2.4} t^{2.4} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{5}{3} t^{2.4} + C}} \quad . \end{aligned}$$

b)

$$\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C \quad .$$

Her har vi brukt denne regelen:

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(ax+b) dx = 1/a \cdot F(ax+b) + C.$$

c) $\int x^2 e^{2x} dx$

Delvis integrasjon: $\int uv' dx = uv - \int u'v dx$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^{2x} \Leftarrow v = 1/2 e^{2x}$$

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2x \frac{1}{2} e^{2x} dx = x^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} dx \quad .$$

Ny delvis integrasjon:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{2x} \Leftarrow v = 1/2 e^{2x}$$

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \quad .$$

Vi får:

$$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C \right) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C \quad .$$

d)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{t^2+9} dt &= \int \frac{1}{9(t^2/9+1)} dt = \frac{1}{9} \int \frac{1}{(t/3)^2+1} dt \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1/3} \arctan \frac{t}{3} + C = \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} + C \quad . \end{aligned}$$

Her har vi brukt samme antiderivasjonsregel som i b).

e) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx$

Variabelbytte: $u(x) = x^2$

$$\frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

$$u(0) = 0, \quad u(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}^2 = \pi.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2) dx &= \int_{u(0)}^{u(\sqrt{\pi})} x \sin u \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \\ &= \frac{1}{2} [-\cos u]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} (\cos \pi - \cos 0) = 1 \quad . \end{aligned}$$

f) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx$

Dette integralet let seg ikke løse ved antiderivasjon; integranden har ingen elementær antiderivert. Vi løser det difor numerisk ved hjelp av trapesmetoden. Ei implementering av denne kan sjå slik ut:

```
% Integrasjonsgrenser:
a=0;
b=sqrt(pi);

% Delintervall:
N=input('Delintervall: ');
DeltaX=(b-a)/N;

% Argumentvektor (den har N+1 element)
Xvektor=a:DeltaX:b;
% Vektor med funksjonsverdier for integranden:
Fvektor=sin(Xvektor.^2);

% Summerer
T=0;
% Fyrste element:
T=T+DeltaX*Fvektor(1)/2;
% Indre element:
for n=2:N
    T=T+DeltaX*Fvektor(n);
end
% Siste element:
T=T+DeltaX*Fvektor(N+1)/2;

% Skriv estimat til skjerm:
Estimat=T
```

Vi har kalt skriptet "TrapesInt.m". Vi kjører dette med stadig flere delintervall:

```
> TrapesInt
Delintervall: 10
Estimat = 0.88549
> TrapesInt
Delintervall: 20
Estimat = 0.89251
> TrapesInt
Delintervall: 50
Estimat = 0.89446
> TrapesInt
Delintervall: 100
Estimat = 0.89474
> TrapesInt
Delintervall: 200
Estimat = 0.89481
```

Vi kan nok trygt gå ut fra at i alle fall dei tre fyrste desimalane er rette:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx \approx \underline{0.895} \quad .$$

g) $\int_{-1}^1 x \cos(2x) dx$

Dette integralet er enklast å løyse ved å observere at integranden er ein odde funksjon, $(-x) \cos(2 \cdot (-x)) = -x \cos(2x)$. Sidan denne skal integrerast over eit intervall symmetrisk omkring 0, blir integralet 0.

Integralet kan også reknast ut ved delvis integrasjon:

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos(2x) \Leftarrow v = 1/2 \sin(2x)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x \cos(2x) &= \left[x \cdot \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sin(2x) dx = \\ &= \frac{1}{2} (1 \cdot \sin 2 - (-1) \sin(-2)) + \frac{1}{4} [\cos(2x)]_{-1}^1 = \\ &= 0 + \frac{1}{4} (\cos 2 - \cos(-2)) = \underline{0} \quad . \end{aligned}$$

Oppgåve 3

a)

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 7 \\ 2x &= \ln 7 \\ x &= \frac{\ln 7}{2} = \ln \sqrt{7} \quad . \end{aligned}$$

b) $e^x = -\ln x$

Dette er ei transcendent likning som ikkje let seg løyse analytisk. Vi brukar Newtons metode igjen. Den går ut på å løyse likninga $f(x) = 0$ ved hjelp av iterasjonsformelen $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$. I vårt tilfelle kan vi velge $f(x) = e^x + \ln x$, slik at formelen blir

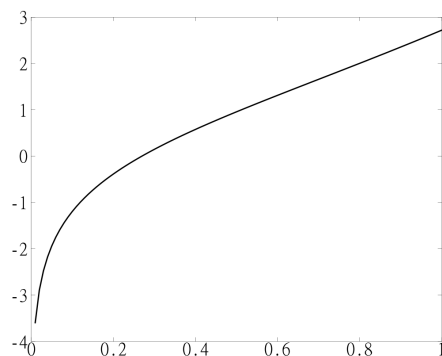
$$x_{n+1} = x_n + \frac{e^{x_n} + \ln x_n}{e^{x_n} + \frac{1}{x_n}} = x_n + \frac{x_n(e^{x_n} + \ln x_n)}{x_n e^{x_n} + 1} \quad .$$

Vi endrar linje i 13 i skriptet NewtonsMet.m tilsvarende:

$$\text{xNy} = \text{xGml} - \text{xGml} * (\exp(\text{xGml}) + \log(\text{xGml})) / (\text{xGml} * \exp(\text{xGml}) + 1);$$

Ved å plotte $f(x)$ kan vi få eit hint om kva x_0 det kan vere lurt å velge. Ut frå figur 2, kan det sjå ut til at 0.3 kan vere ei god start-gjetting.

Vi køyrer skriptet:



Figur 2: Plott av funksjonen $f(x) = e^x + \ln x$.

```
> rehash NewtonsMet.m
> NewtonsMet
Gi x0: .3
x = 0.26987
```

Vi får altså svaret $x \approx \underline{0.270}$.

c)

$$\begin{aligned} 2 - i &= 4z + 2i \\ 4z &= 2 - i - 2i = 2 - 3i \\ z &= \frac{2 - 3i}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}i}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= 0 \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}i}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \\ x &= \underline{3 - 2i} \quad \text{eller} \quad x = \underline{3 + 2i} \end{aligned}$$

Oppgave 4

Tid (s)	0.0	2.0	4.0	6.0	8.0	10.0
Straum (l/s)	7.2	6.9	6.7	6.3	5.8	5.9

a) For å estimere dei deriverte, tar vi utgangspunkt i midpunktsformelen:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}))}{2h}, \quad \text{der vi skal ha at } x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1} = h \quad .$$

Om vi lar $f(t)$ være strømmen, i liter per sekund, etter t sekunder, får vi

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{f(4) - f(0)}{2 \cdot 2} = \frac{6.7 - 7.2}{4} = \underline{-0.125} \quad . \\ f'(5) &\approx \frac{f(6) - f(4)}{2 \cdot 1} = \frac{6.3 - 6.7}{2} = \underline{-0.2} \quad . \end{aligned}$$

Legg merke til at “ h ” er ulik i dei to utrekningane.

- b) Sidan $f(t)$ er mengda vatn som passerar per tid, vil $\int_0^{10} f(t) dt$ vere mengda av alt vatnet som har passert i tidsintervallet $[0, 10]$. Sidan vi ikkje har nokon funksjonsuttrykk for $f(t)$, kan vi ikkje rekne ut integralet ved antiderivasjon. Vi gjer det, som vanleg, ved trapesmetoden:

$$\begin{aligned} \int_0^{10} f(t) dt &\approx \Delta x \left(\frac{1}{2} f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + \frac{1}{2} f(10) \right) = \\ &2 \cdot (7.2/2 + 6.9 + 6.7 + 6.3 + 5.8 + 5.9/2) = 64.5 \quad . \end{aligned}$$

Det har runne ca. 64.5 liter vatn.